



TITLE:

大強度軸対称ビームにおけるビームハロー形成過程の研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

池上, 雅紀

CITATION:

池上, 雅紀. 大強度軸対称ビームにおけるビームハロー形成過程の研究. 京都大学, 1997, 博士(理学)

ISSUE DATE:

1997-11-25

URL:

<https://doi.org/10.11501/3131531>

RIGHT:

新 制
理
1021

学位申請論文

池上 雅紀

大強度軸対称ビームにおけるビームハロー形成過程の研究

京都大学大学院理学研究科物理学第二専攻

池上 雅紀

平成9年8月

第1章 はじめに

空間電荷効果が支配的な高密度ビームの力学的挙動は本質的に非線形であり、結合効果、ビーム密度の自発的再構成、構造共鳴、ビームハローの形成など多種多様な集団効果が引き起こされることが知られている。空間電荷効果の研究は、過去数十年にわたって、理論・数値解析の両面から精力的になされてきたが、特に近年、大強度イオンビームを核廃棄物の消滅処理やトリチウム生産などへ応用する計画が各地で検討されるようになってから、その度合を一層増している。これら次世代の大強度加速器では、わずかなビームロスも加速器全体を放射化するのに十分である[1,2]ため、その設計に際しては、特にビームハローの形成過程に対する基本的理解とその定量的評価が必要不可欠である。

これまでになされてきた研究の結果から、ビームハローの形成においては、入射ビームが加速器・ビーム輸送系に対して不整合をもつ場合に発生するプラズマ振動が本質的な重要性をもつと考えられている[3]。このような観点から、ビームハローの形成過程を定量的に評価するために、様々な理論的、数値的な研究がなされてきた。それらの中で最も一般的な方法は、粒子-核 (particle-core) モデルに基づくものである。Gluckstern[4,5]によって最初に提唱されたこの方法は、他の研究者ら[6-9]によって発展させられ、ビームハローの形成過程を理解する上で非常に重要な役割を果たしてきた。このモデルでは、ふつう最低次の脈動モードの振動を行うKV (Kapchinskij-Vladimirskij) 分布[10]をもつビーム核を考え、この振動するビーム核のポテンシャルのもとで運動するテスト粒子の力学的挙動を調べる。この際、ビーム核の振動はテスト粒子の運動の影響を受けないと仮定する。よって、ビーム核の振動の様子は単にエンベロープ方程式[14, Appendix-A]を解くことによって追跡できる。この粒子-核モデルではビーム核の振動が安定であるため¹[11,12]、なぜビームを構成する粒子の一部がビーム核から離れてハローを形成するのかを説明できない。しかし、現実の高密度ビームは、KVビームと異なってビーム核の周りにテールをもっており、また、そのビーム核はビーム密度の自発的再構成[12]によってほぼ一様な実空間分布をもつと考えられている²。すなわち、このテールを構成

¹ 初期の不整合の大きさが、振動として扱えないほど大きいときには、最低次の脈動モードが安定であるかどうかは明らかではない。しかし、粒子-核モデルでは、不整合が大きいときにもKVビーム核は安定な最低次の脈動振動をすると仮定する。

² 高密度の定常ビームの実空間分布は、ほぼ一様となる。ビームがこの定常分布からはずれているときでも、その実空間分布を一様化することによって、この定常分布に近づこうとする。このような、ビーム密度の自

する粒子は、KVビームがつくるポテンシャルと似たポテンシャル中を運動することになる。このことを考慮に入れば、粒子-核モデルによって、現実の高密度ビームのテールを構成する粒子の力学的挙動を良い近似で調べるができると考えられる³。

ハローの研究にしばしば用いられるもう一つの方法は、rms ビーム半径の時間発展に着目するものである。この方法では、ビームのエミッタンスが時間的に変化しないことを仮定した上でエンベロープ方程式を解くことによって、rms ビーム半径の時間発展を追跡し、収束系のもつ周期性によって引き起こされるビームの不安定性[15-19]を調べる。このとき、個々の粒子の運動には着目しない。外部収束力の周期性が不安定性を引き起こすことから、この効果は有名な構造共鳴[20,21]の一種であると考えられる。構造共鳴による不安定性は、1980年代から精力的に研究されてきたが、最近までハローの問題と結びつけて論じられることはなかった。このrms 量に基づくアプローチの最大の長所は、基礎とするエンベロープ方程式が、ビームの実空間分布が精円対称性を破らない限り、ビームの分布に依存しないということである。しかし、このアプローチで用いられる「エミッタンスが一定である」という仮定がハローの形成と矛盾するものであること、粒子シミュレーションの結果から収束系が周期性をもたなくてもハローが形成されることが知られていることなどから、このモデルがハロー形成過程の本質をどの程度正確にとらえているかは、現時点では明らかでない。

粒子-核モデルやrms 量に基づくアプローチのように、単純化されたモデルを用いてハローの形成過程を研究することは、この物理的過程において何が本質的に重要な要素であるかを調べる上で非常に有効である。しかし、これらのモデルにおける仮定が妥当であることを保証するためには、これらのモデルに基づいて得られた結果と実験もしくは自己充足的な粒子シミュレーションで得られた結果を詳細に比較、検討することが不可欠である。また、現実には次世代の大強度加速器を設計する上で有用な定量的設計基準を得るためにも、できる限り現実的な粒子シミュレーションを行うことが必要である。このような観点から、我々は、線形な収束系を輸送されるビームにおけるハロー形成過程に関する知見を深めるために、自己充足的な粒子シミュレーションコードを用いた系統的なシミュレーションを行うこととした。しかし、現実には、あらゆる効果を考慮に入れた粒子シミュレーションを十分な精度で行うことは、現在最高の計算速度をもつ計算機をもってしてもきわめて難しい。そこで、我々は、初期のビームサイズの不整合によって引き起こされるビーム核の振動に特に重点をおくこととし、脈動振動をするビームの力学的挙動を研究するためのコードを新たに開発した[22-25]。ここで、簡単のために、残留ガスによるビームの散乱 (residual gas scattering) や、ビームを構成する粒子どうしの散乱 (intra-beam scattering) の効果は無視することとし、軸対称なビームだけを考

発的再構成の過程は、共鳴やカオスとは本質的に無関係であると考えられる。詳しくは参考文献[12]および[13]を見よ。

³ 言うまでもなく、このことは粒子-核モデルがハロー形成過程の厳密な描像を与えるということを意味するのではない。例えば、現実のビームのビーム核の境界は、もしそのようなものが定義できたとするならば、KVビームのそれとはかなり異なると思われる。実際、第2章で述べるように、現実的なビームのもつ非線形性によって、ビーム核を構成する粒子の運動がストカスティックになり、ビーム核の安定性が部分的に失われる可能性がある。

えることとした。また、空間電荷効果はとくに低エネルギーのときに顕著であることが知られているため、非相対論的な場合だけを考えることとした。我々が考えている脈動モードは軸対称な振動モードであるため、輸送されている間を通して、ビームの軸対称性は厳密に保たれる。この場合、考えている系のもつ対称性から、問題が本質的に1次元になるため、時間のかかる通常の2次元のPIC (particle-in-cell) アルゴリズム [26,27] を採用する必要はない。今回我々が開発したコードでは、1次元のメッシュしか必要でなく、したがって従来の2次元のPICコードに比べて、より多くのシミュレーション粒子を用いたより精度の高いシミュレーションが、より短いCPU時間で行うことができるという利点がある。また、このコードでは、脈動モード以外のビーム振動は原理的に発生しないため、ハロー形成における脈動モードの役割だけを選択的に調べるのにも適している。

この論文は、次のように構成されている。まず第2章では、粒子-核モデルを簡単に振り返る。この章では、通常のKVモデルに基づく粒子-核モデルとともに、定常ウォーターバグ分布 [28] をもつビーム核を導入したアルゴリズムについても述べる。一様な収束系を輸送される軸対称ビームの1次元粒子シミュレーションについては、第3章で述べる。この章では、開発したコードをいくつかの異なる初期分布をもつビームについて適用して得られた結果を示す。第4章では、このコードを周期的な収束系を輸送されるビーム適用できるよう拡張する。最後に、第5章に得られた結果をまとめることとする。

第2章 粒子-核モデル

第2.1節 KVモデル

ビームの水平方向、鉛直方向のrms半径をそれぞれ a 、 b とすると、一様な収束系を輸送されるビームのエンベロップ方程式は次のように表わされる：

$$\frac{d^2 a}{ds^2} = -\kappa_0^2 a + \frac{K}{2(a+b)} + \frac{\epsilon_x^2}{16a^3} \quad (2.1)$$

ここで、 κ_0 は収束系の収束力の強さを表わす定数、 ϵ_x は水平方向のrmsエミッタンス (rms emittance) である。 K はビーム密度の大きさを表すパラメータである一般化されたパービアンス (generalized perviance) で、ビームを構成する各粒子の質量を m 、電荷を q 、速度を u 、ビーム電流を I とすると、 $K = qI / 2\pi\epsilon_0 m u^3$ と定義される。独立変数 s はビーム輸送系に沿って測った距離を表わす。式(2.1)と同様の式が、鉛直方向についても成り立つ。特に、軸対称ビームについては、 $a=b$ 、 $\epsilon_x=\epsilon_y=\epsilon$ であるから、式(2.1)は次のように書き直すことができる：

$$\frac{d^2 \tilde{\rho}}{d\tilde{s}^2} = -\tilde{\rho} + \frac{\tilde{K}}{2\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{4\tilde{\rho}^3} \quad (2.2)$$

ここで、 $\tilde{\rho} = \sqrt{2\kappa_0/\epsilon} a = \sqrt{2\kappa_0/\epsilon} b$ 、 $\tilde{K} = K/\kappa_0 \epsilon$ 、 $\tilde{s} = \kappa_0 s$ である。この式より、整合のとれたビームのrmsビ

一ム半径 $\tilde{\rho}_0$ は、次のように求められる：

$$\tilde{\rho}_0^2 = \frac{\tilde{K} + \sqrt{\tilde{K}^2 + 4}}{4} \quad (2.3)$$

ここで、ビーム密度の大きさを表すもう一つのパラメーターであるチューンディプレッション (tune depression) η^4 、すなわち、空間電場のもとでの位相の進みの空間電荷効果は無視したときの位相の進みに対する比を導入しておこう。ここで、整合のとれたKVビームを考える。このビームの実空間分布は、次のように表すことができる：

$$n_{KV}(r) = \text{const.} \quad (r \leq R_0) \quad (2.4a)$$

$$n_{KV}(r) = 0 \quad (r > R_0) \quad (2.4b)$$

ここで、 $R_0 = \sqrt{2}\rho_0$ は整合がとれたKVビームのビーム半径である。このビームについては、各粒子に働く空間電荷力が完全に線形になるため、各粒子の水平方向の運動方程式は、次のように表すことができる：

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\left(\kappa_0^2 - \frac{K}{R_0^2}\right)x \quad (2.5)$$

同様の式が、鉛直方向についても成り立つ。この式から、粒子のベータトロン振動の位相の進みは、空間電場によって粒子に働く発散力のため、空間電荷効果は無視したときに比べて小さくなることがわかる。この式より、チューンディプレッション η は、次のように求めることができる：

$$\eta^2 = 1 - \frac{K}{\kappa_0^2 R_0^2} \quad (2.6)$$

この式と、式(2.3)より、チューンディプレッションは、スケールされたパービアンズ \tilde{K} と次のように関係づけられる⁵：

⁴ 本論文では、チューンディプレッションをビーム密度の大きさを表すパラメーターとして用いている。例えば、エネルギーが50keV、整合されたrms半径が1mm、正規化されていないrmsエミッタンスが $100\pi\text{mm}\cdot\text{mrad}$ の陽子ビームの場合、チューンディプレッションが0.9、0.7、0.5、0.3、0.2、0.1になるときのビーム電流は、それぞれ0.02 A、0.09 A、0.26 A、0.87A、2.1 A、8.6 A である。

⁵ 厳密に言えば、KVビーム以外のビームを構成する各粒子のベータトロン振動の位相の進みは、空間電場のもつ非線形性のために、粒子によって異なることに注意してほしい。さらに、KVビームであっても、不整合がある場合は、ベータトロン振動の位相の進みは時間に依存する。KVビーム以外のビームや不整合の

$$\tilde{K} = \frac{1-\eta^2}{\eta} \quad (2.7)$$

この式より、ビーム密度が無限に大きいときチューンディプレッションは0、無限に0に近いとき1となることがわかる。

ここで、 $\tilde{r} = \sqrt{\kappa_0/\epsilon} r$ 、 $\tilde{\theta} = \theta$ 、 $\tilde{p}_r = p_r/\sqrt{\kappa_0\epsilon}$ 、 $\tilde{p}_\theta = p_\theta/\epsilon$ で定義される無次元の正準変数を導入しよう。 (r, θ) は極座標であり、 (p_r, p_θ) はこれに正準な運動量である。また、このスケールされた座標系における独立変数は \tilde{s} である。今考えている力学系では方位角座標 θ はサイクリックになるため、角運動量は運動の定数となる。すなわち、 $\tilde{p}_\theta = \tilde{L} = \text{const}$ である。KV分布をもつビーム核が最低次の脈動振動を行うと仮定すると、テスト粒子の運動方程式は次のように表わすことができる：

$$\frac{d^2\tilde{r}}{d\tilde{s}^2} = -\tilde{r} + \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{r}^3} + \frac{\tilde{K}}{\tilde{R}^2}\tilde{r} \quad (\tilde{r} \leq \tilde{R}) \quad (2.8a)$$

$$\frac{d^2\tilde{r}}{d\tilde{s}^2} = -\tilde{r} + \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{r}^3} + \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}} \quad (\tilde{r} > \tilde{R}) \quad (2.8b)$$

ここで、 $\tilde{R} = \sqrt{2}\tilde{\rho}$ はKV分布をもつビーム核のスケールされた半径である。

粒子-核共鳴は、テスト粒子の角運動量が0のときに最も顕著になると考えられている。そこで、我々は式(2.6)の代わりに、さらに簡単な次のような方程式を考える：

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{s}^2} = -\tilde{x} + \frac{\tilde{K}}{\tilde{R}^2}\tilde{x} \quad (|\tilde{x}| \leq \tilde{R}) \quad (2.9a)$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{s}^2} = -\tilde{x} + \frac{\tilde{K}}{\tilde{x}} \quad (|\tilde{x}| > \tilde{R}) \quad (2.9b)$$

粒子-核モデルでは、まず式(2.2)を初期条件 $\tilde{\rho}(0) = \mu\tilde{\rho}_0$ 、 $(d\tilde{\rho}/d\tilde{s})(0) = 0$ のもとで数値積分し、その結果を、式(2.9)に代入して、テスト粒子の位置 \tilde{x} の時間発展を決定する。ここで、 μ はミスマッチファクター⁶である。ここで、この粒子-核モデルにおけるパラメータは \tilde{K} だけであることに注意しておいてもらいたい。

不整合のあるビームでも、ビームの実空間分布が一様であると仮定する限り、この粒子-核モデルの方程式系は、モードのもつ線形性のために、自己充足的である。このことは、この粒子-核モデルでは、ビーム核を構成していた粒子がハローになるメカニズムを説明できないことを意味する。すなわち、初期にビーム

あるビームについては、そのビームと等価な整合のとれたKVビームを考え、そのKVビームのチューンディプレッションを、そのビームのチューンディプレッションと考えることとする。

⁶ この論文では、ミスマッチファクターが1よりも大きい場合だけを考える。

核の中に存在していた粒子は、永久にビーム核の中に存在し続け、ハローになる可能性はない。しかし、最初から粒子がビーム核の外側にあれば、それらは容易に共鳴によって振幅が増大し、ハローになりうる。現実の高密度ビームがビーム密度の自発的再構成によって、一様に近い実空間分布をもつことを考えれば、初期にビーム核の外側に存在していた粒子の軌道は、この粒子-核モデルによって、良い近似で求められると考えられる⁷。

第2.2節 ウォーターバッグモデル

KV分布は、その空間電場が線形であり、その線形性が解析を著しく容易にするために、空間電荷効果の理論的な研究の基礎として、しばしば用いられてきた。しかし、現実の高密度ビームの空間電場が多かれ少なかれ非線形性をもつことは明らかである。したがって、非線形なビーム核をもつ粒子-核モデルを構築することは、たとえそれが近似的なものであっても、意義のあることであると考えられる。このような観点から、我々は、粒子-核モデルに、非線形な分布である定常ウォーターバッグ分布⁸をもつビーム核を導入することを試みた。定常ウォーターバッグ分布は、一様な収束系におけるブラソフ-ポアソン (Vlasov-Poisson) 方程式系[29, Appendix-C]の定常解の一つであり、その位相空間における分布関数 f は、粒子の横方向の運動を支配するハミルトニアンを H として

$$f(H) = \text{const.} \quad (H \leq E_0) \quad (2.10a)$$

$$f(H) = 0 \quad (H > E_0) \quad (2.10b)$$

で定義される。ここで、 E_0 は定数である。この分布は、0 から E_0 までの値の横方向のエネルギーをもつ粒子が同じ確率で存在し、 $H=E_0$ で定義される4次元超楕円体の内側に粒子が均一に分布することで特徴づけられる。この定常ウォーターバッグ分布は、本来整合のとれたビームについて定義されているものであるが、我々は粒子-核モデルにこの分布を導入するにあたって、不整合のある場合でも定常ウォーターバッグ型の分布が保たれるものと近似した。

定常ウォーターバッグ分布は、次のような実空間分布をもつ：

$$n_0(\vec{r}) = \frac{N}{\pi \tilde{K}} \left[1 - \frac{I_0(\zeta_0 \vec{r})}{I_0(\zeta_0 \vec{P}_0)} \right] \quad (2.11)$$

ここで、 $I_n(z)$ は n 次の変形ベッセル関数であり、 \vec{P}_0 は整合された定常ウォーターバッグビームのスケールさ

⁷ 現実的なビームの位相空間分布は、たとえ実空間分布が一様分布に近くても、KVビームの位相空間分布とはかなり異なることに注意してほしい。

⁸ 第3章、第4章で粒子シミュレーションの初期分布として用いられるウォーターバッグ分布とは異なることに注意してほしい。詳しくは、Appendix-Cを参照。

れた半径、 N は粒子の総数、 ζ_0 は次のような関係式を満たす定数である：

$$\frac{\bar{K}}{\bar{P}_0} \frac{I_0(\zeta_0 \bar{P}_0)}{I_2(\zeta_0 \bar{P}_0)} = 1 \quad (2.12)$$

不整合のあるビームについても、定常ウォーターバグ型の分布がほぼ維持されると仮定して、式(2.7)の \bar{P}_0 と ζ_0 を、不整合のあるビームの半径を表わす \bar{P} と次のような関係式を満たす ζ で置き換える。

$$\frac{\bar{K}}{\bar{P}} \frac{I_0(\zeta \bar{P})}{I_2(\zeta \bar{P})} = 1 \quad (2.13)$$

すると、このビーム核の周りを運動する角運動量が 0 のテスト粒子の運動方程式は、次のように表わすことができる：

$$\frac{d^2 \bar{x}}{ds^2} = -\frac{2I_1(\zeta \bar{x})}{\zeta_0 I_2(\zeta \bar{P})} \quad (|\bar{x}| \leq \bar{P}) \quad (2.14a)$$

$$\frac{d^2 \bar{x}}{ds^2} = -\bar{x} + \frac{\bar{K}}{\bar{x}} \quad (|\bar{x}| > \bar{P}) \quad (2.14b)$$

KVモデルに基づく粒子-核モデルとウォーターバグモデルに基づく粒子-核モデルの間で、物理的に意味のある比較をするためには、2つのビームは等価である必要がある。すなわち、2つのビームの2次モーメントが一致する必要がある。また、言うまでもなく、 η と μ の値は同じでなくてはならない。 \bar{P} と ζ は、式(2.10)と次の式を連立して解くことによって求められる：

$$\bar{P}^2 = \frac{4}{\zeta^2} + \bar{P}^2 - \frac{\bar{P}^4}{2\bar{K}} \quad (2.15)$$

ここで、軸対称なビームを考える限り \bar{P} は分布に対する依存性がないので、KVモデルで用いた \bar{P} をそのまま用いることができる。最後に、得られた \bar{P} と ζ を式(2.14)に代入することによって、テスト粒子の運動を調べる⁹ことができる。

第2.3節 数値解析の結果

⁹ 定常ウォーターバグ分布を導入した粒子-核モデルでは、不整合のある場合でも定常ウォーターバグ型の分布が維持されたとした仮定のために、適用することのできる μ の値に上限がある。例えば、式(2.13)と(2.15)が物理的に意味のある解をもつためには、 $\eta=0.5$ のときには、 μ は約 1.15 よりも小さくなければならない。

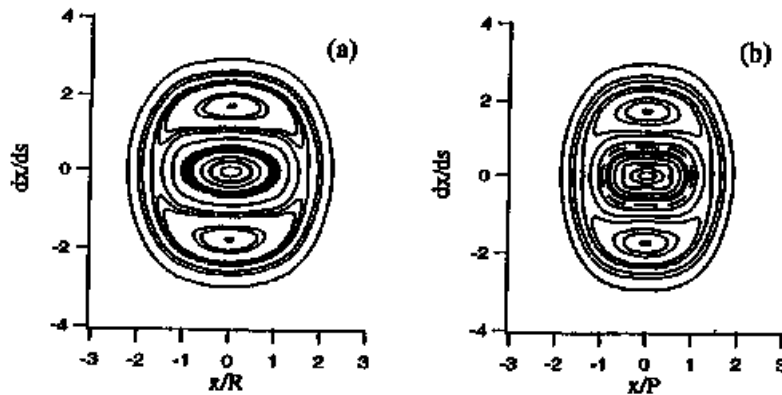


図1 $(x, dx/ds)$ 平面におけるポアンカレ断面図。左図は、KVモデルに基づいたもの。右図はウォーターバグモデルに基づいたもの。どちらの図も、 $\eta=0.5$ 、 $\mu=1.1$ の条件のもとで得られたものである。

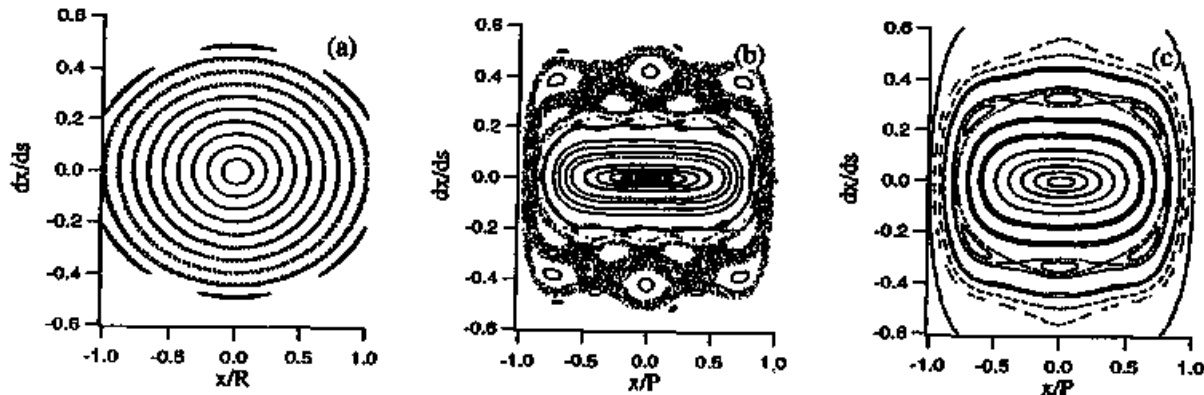


図2. $(x, dx/ds)$ 平面におけるポアンカレ断面図。(a)は、 $\eta=0.2$ 、 $\mu=1.01$ のKVビーム。(b)は、 $\eta=0.2$ 、 $\mu=1.01$ のウォーターバグビーム。(c)は、 $\eta=0.3$ 、 $\mu=1.01$ のウォーターバグビーム。ビーム核のあたりだけを拡大して表示してある。

ハロー形成過程を系統的に調べるには、Lagnielによって初めて粒子-核モデルに導入されたポアンカレマップ法 (Poincaré mapping technique) [30]を用いるのが便利である。例として、図1に、 $\eta=0.5$ 、 $\mu=1.1$ の場合のポアンカレ断面図 (Poincaré surface of section) を示した。一粒子の運動方程式の形から予想されるように、核から離れた領域においては、図1の2つの図はよく似ている。一方、ウォーターバグ核の内部は、KV核と比べて複雑で、KV核では見られない高次の島 (island) が見られる。さらにウォーターバグ核のセパトラトリクスは、KV核のように楕円ではなく、その非線形性によってレーストラック型になっている。

ビーム密度の高い領域では、ウォーターバグ核は、KV核と本質的に異なるさらに興味深い性質を示すことがわかった。図2(a)は、対応するKVビームのポアンカレ断面図を示したものである。当然、核の内側の粒子の運動は完全にレギュラーである。これに対して、図2(b)に示したように、同じ η と μ のウォーターバグ核では、ある大きさのレギュラーな領域のまわりに、ストカスティックな領域が見られる。現実のビ

ームが非線形性をもつことを考慮に入れば、核の周辺部にこのようなストカスティックな領域が形成されることが、ハロー強度を増大させることは十分に考えられる。このモデルでは、このカオスへの転移は $\eta=0.2$ から $\eta=0.3$ の範囲で起こった。実際、図2(c)に示した $\eta=0.3$ のケースでは、ストカスティックな層はほとんど見られない。

第3章 粒子シミュレーション（一様な収束系）

近似を用いた単純化されたモデルに基づくアプローチの限界を打破する最も有効な方法は、高密度ビームの基礎的な特性を自己充足的に調べることでできる粒子シミュレーションを行うことである。このシミュレーション結果を現実的に意味のあるものにするためには、初期ビームの分布を十分に現実的なものにする必要がある。現実には線形加速器に入射されるビームの位相空間上での分布は様々な要素に依存するため、一概にどのような形であるかをいうことはできない。そこで、我々は、ガウス分布¹⁰、パラボリック分布、ウォーターバグ分布の3つの異なるタイプの非線形な分布を初期分布として採用し[Appendix-C]、得られた結果に初期分布に対する依存性があるときには、最も顕著なハローが生じた場合に最も注意を払うこととした。ここで採用した3つの分布が少なくともKV分布よりも安定で現実的であることは疑う余地がない。したがって、我々の目的に適していると考えられる。この章では、一様な収束系を輸送される軸対称なビームの力学的挙動を自己充足的に調べるために開発された粒子シミュレーションコードについて、そのシミュレーション方法と、得られた結果を示す。

第3.1節 シミュレーション方法

軸対称でかつ一様な収束力の下での粒子の運動は、次のようなハミルトニアンに支配される：

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \kappa_0^2 r^2 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} V_{sc}(r, s) \quad (3.1)$$

ここで、 $V_{sc}(r, s)$ は空間電荷ポテンシャルを表わす。ビームの振動モードと収束系の軸対称性から、式(3.1)のように、ハミルトニアンが方位角座標 θ に依らなくなるため、角運動量 $p_\theta = L$ は運動の定数となる。式(3.1)とガウスの法則より、粒子の従う動径方向の運動方程式は

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\kappa_0^2 r + \frac{L^2}{r^3} + K \frac{\xi(r, s)}{r} \quad (3.2)$$

と求められる。ここで、角運動量 L は粒子によって異なる値をとる定数であり、 $\xi(r, s)$ は半径 r の円内にある

¹⁰ 今回開発したシミュレーションコードでは、初期分布としてガウスビームを生成する際、標準偏差の3倍のところでビームのテールを切っている。詳しくは、Appendix-Cを参照。

電荷量と総電荷量の比である。第2章で導入したスケールされた座標を用いると、式(3.2)は次のように書き直することができる：

$$\frac{d^2\tilde{r}}{d\tilde{s}^2} = -\tilde{r} + \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{r}^3} + \tilde{K} \frac{\xi(\tilde{r};\tilde{s})}{\tilde{r}} \quad (3.3)$$

式(3.3)より、初期ビームが有する不整合の大きさ以外のパラメータで必要なものは η だけであることがわかる。粒子によって異なる値をとる定数である \tilde{L} は、ビームの初期分布を (x, y, p_x, p_y) 位相空間で生成すれば、関係式 $\tilde{L} = (xp_x - yp_y)/\varepsilon$ より求められる。

ここで、軸方向の特徴的な長さであるプラズマ波長 λ_p ¹¹ を導入しておく。一般的なプラズマ振動数の定義 $\omega_p = \sqrt{K}u/R_0$ [11] を用いることにより、 λ_p は η と次のような式で関係づけられる：

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\kappa_0 \sqrt{1-\eta^2}} \quad (3.4)$$

したがって、スケールされたプラズマ波長 $\tilde{\lambda}_p = \kappa_0 \lambda_p$ は η だけの関数であることがわかる。

本研究のために開発したコードでは、粒子分布の (r, p_r) 位相空間における時間発展を追跡するために、ステップサイズ可変の2次のシンプレクティック法[31, Appendix-B]を用いて式(3.3)の数値積分を行っている。この際、動径方向にメッシュを切り、各粒子の電荷を最も近いメッシュポイントに割り当てることにより、 $\xi(r;s)$ の形を決定した。

また、簡単のため、以後、この章ではチルダ (\sim) は省略するものとする。

第3.2節 シミュレーション条件

シミュレーション粒子数、積分ステップサイズ、動径メッシュサイズなどのシミュレーションパラメータの適切な値を求めるために、ガウスビームを用いた予備的なシミュレーションを行った。その結果、 ρ_0 あたりの動径メッシュ数が100以上であれば、シミュレーション結果は動径メッシュサイズに依らないことがわかった。粒子数については、粒子数が 10^4 の場合と 10^5 の場合では結果にほとんど差が見られなかった。このことから、計算時間を短縮するため、粒子数は 10^4 とした。積分ステップサイズについては、特徴的な長さである1プラズマ波長あたりのステップ数が 2^{10} 、 2^{11} 、 2^{12} の3つの場合についてシミュレーションを行い、その結果が良く一致することがわかった。このことから、1プラズマ波長あたりのステップ数は 2^{11} とした。このステップサイズは実際の積分ステップサイズの最大値に相当することに注意してほしい。先に述べたように、我々は、数値積分の精度を上げるため、各ステップにおける粒子のエネルギー変化を監視しながら、積分ステップサイズを変化させる可変ステップサイズアルゴリズムを採用している。このときの最小のステッ

¹¹ 例えば、エネルギーが50keV、整合されたrms半径が1mm、正規化されていないrmsエミッタンスが $100\pi\text{mm}\cdot\text{mmrad}$ の陽子ビームの場合、チューンディプレッションが0.9、0.7、0.5、0.3、0.2、0.1のときのプラズマ波長は、それぞれ26cm、12cm、7.2cm、4.0cm、2.5cm、1.3cm、である。

ブサイズは1プラズマ波長の 2^{25} 分の1とした。

我々は、また、 ξ の全位相空間における平均 $\langle \xi \rangle$ を計算した。 $\langle \xi \rangle$ が分布に依らず厳密に0.5になることは解析的に示すことができる[Appendix-A]ので、我々はこの値を数値計算の精度を確かめるために用いた。上に述べたように定めたシミュレーションパラメーターを用いて予備的なシミュレーションを行った結果、 $\langle \xi \rangle$ は0.5を中心として、0.001以下の振幅で振動した。このことは、我々の開発したコードが十分な精度をもつことを意味する。最後に、エンベロープ方程式の解とシミュレーションの結果の比較を行った。エンベロープ方程式が粒子の分布に依らないことから、シミュレーションの結果得られたrmsビーム半径の時間発展は、対応するエミッタンスの時間発展を式(2.1)の ϵ_x に用いれば、式(2.1)の数値解と完全に一致するはずである。実際、シミュレーションを行った結果、これらがよく一致することが確かめられた。

第3.3節 脈動ビームの安定性

まず、最初に、整合のとれたビームを考えてみよう。図3は、比較的低密度($\eta=0.7$)のビームの位相空間上での分布を表したものである。上の3つの図は初期分布を、下の3つの図は20プラズマ波長輸送した後の分布を表している。すべてのケースについてビーム密度の自発的浮構成によるわずかなビーム核の変形が見られるが、予期されたように、この密度領域ではビームは安定に見える。実際、これらのケースでは、エミ

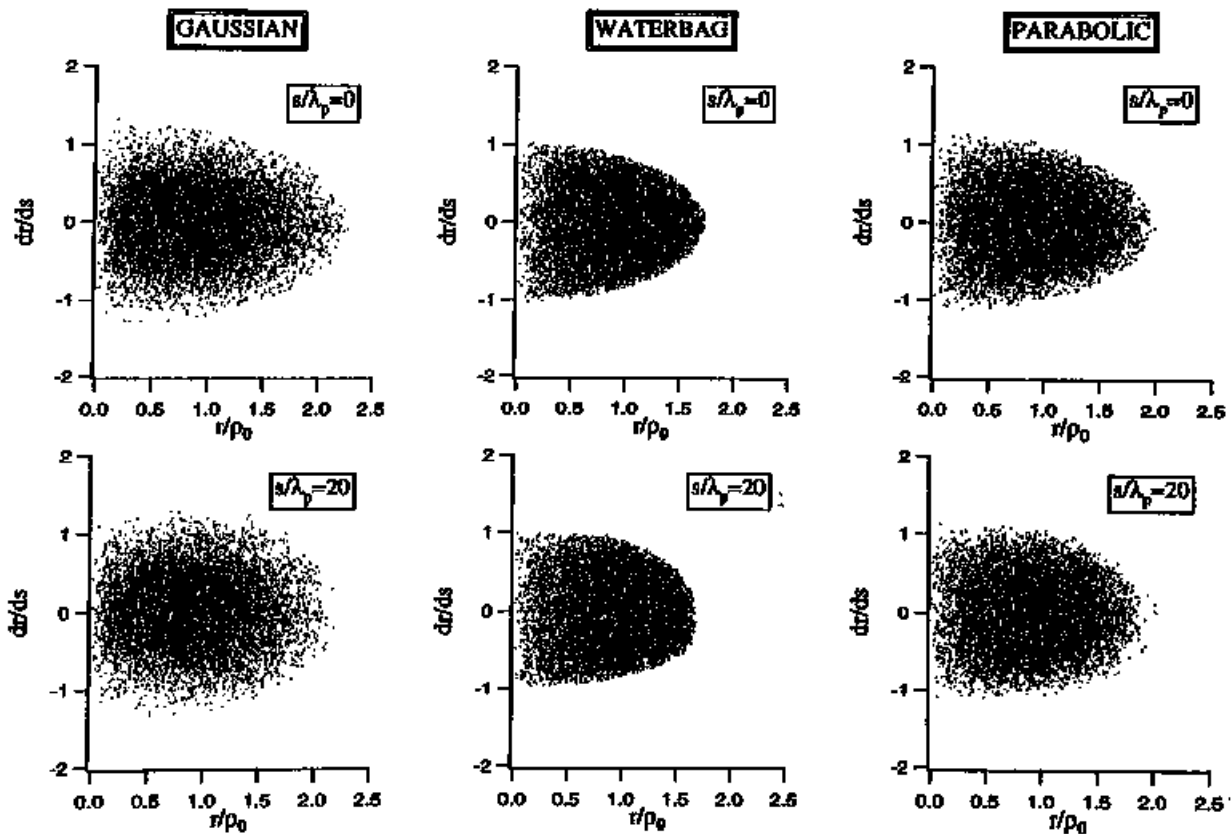


図3. 整合されたビームの動径方向の位相空間分布。 $\eta=0.7$ の条件のもとで得られたもの。上段は、初期分布を、下段は20プラズマ波長輸送した後の分布である。

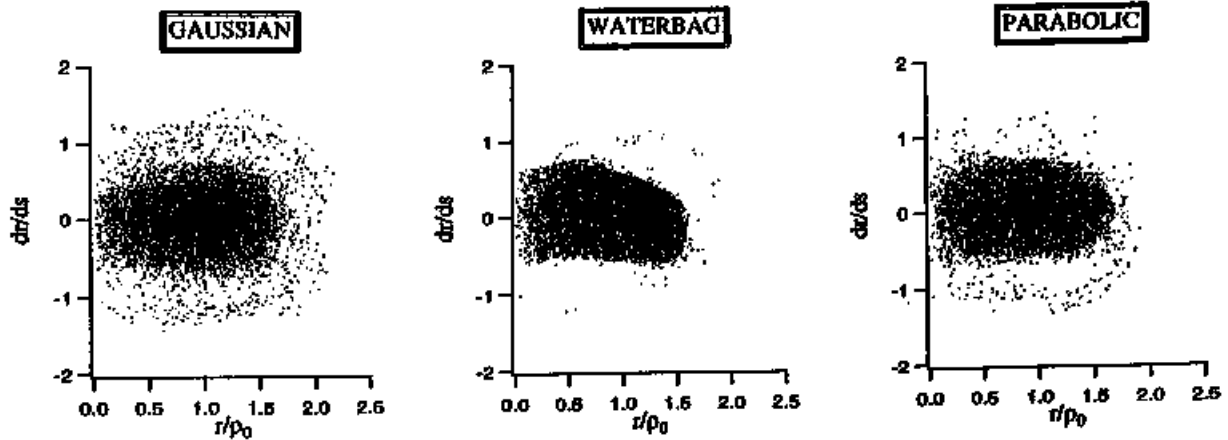


図4. 整合されたビームの動径方向の位相空間分布。 $\eta=0.3$ の条件のもとで得られた、20 プラズマ波長輸送した後の分布。

ッタンス増大はほとんど観測されていない。図4に示した比較的高密度 ($\eta=0.3$) の場合では、状況はもっと複雑なものとなる。この図から、どの初期分布から出発した場合も、多かれ少なかれビーム核のまわりにそれを取りまくハローが形成されていることがわかる。ビーム核は、実空間において一様な状態のまわりで、かなり振幅の大きな振動を行っており、これが整合されたビームにおけるハロー形成の主な原因となっていると考えられる。

rms 整合という整合のしかたを用いる限り、ビーム密度の自発的再構成が引き起こすプラズマ振動を抑えることは一般に不可能である。例として、rms 整合されたガウスビームのビーム密度の時間発展を示した図5を見てほしい。この図から、ビーム核が、高次のモードを含む顕著な脈動振動を行っていることがよくわかる。これを抑えるためには、ブラソフーボアソン方程式系を解くことによって求められる定常状態から出発しなければならない。しかし、粒子シミュレーションに用いられる初期分布は、ブラソフーボアソン方程式系の自己充足的な解を求めるのが一般に難しいため、ふつう線形ハミルトニアンを用いて定義されている[Appendix-C]。そのため、上に示したように、ビーム密度が大きいときにはrms 整合されたビームおい

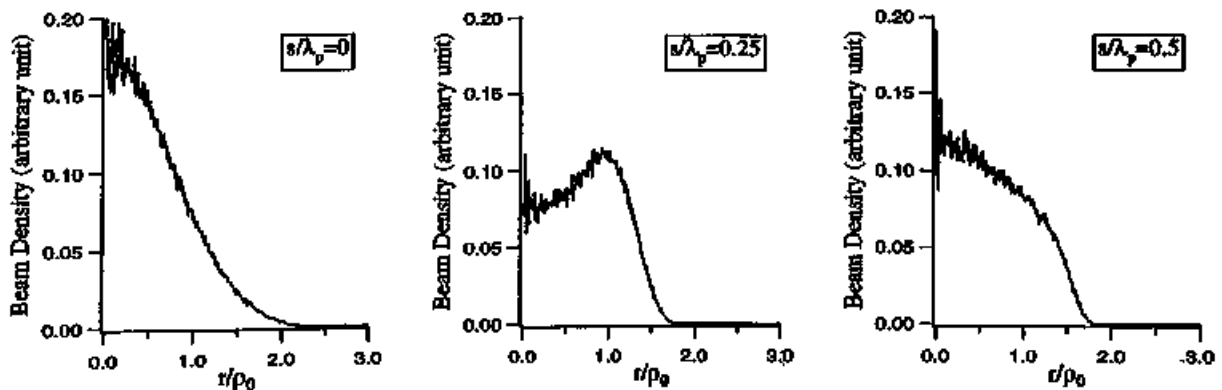


図5. 実空間における密度分布の時間発展。初期分布は $\eta=0.3$ の整合されたガウス分布。

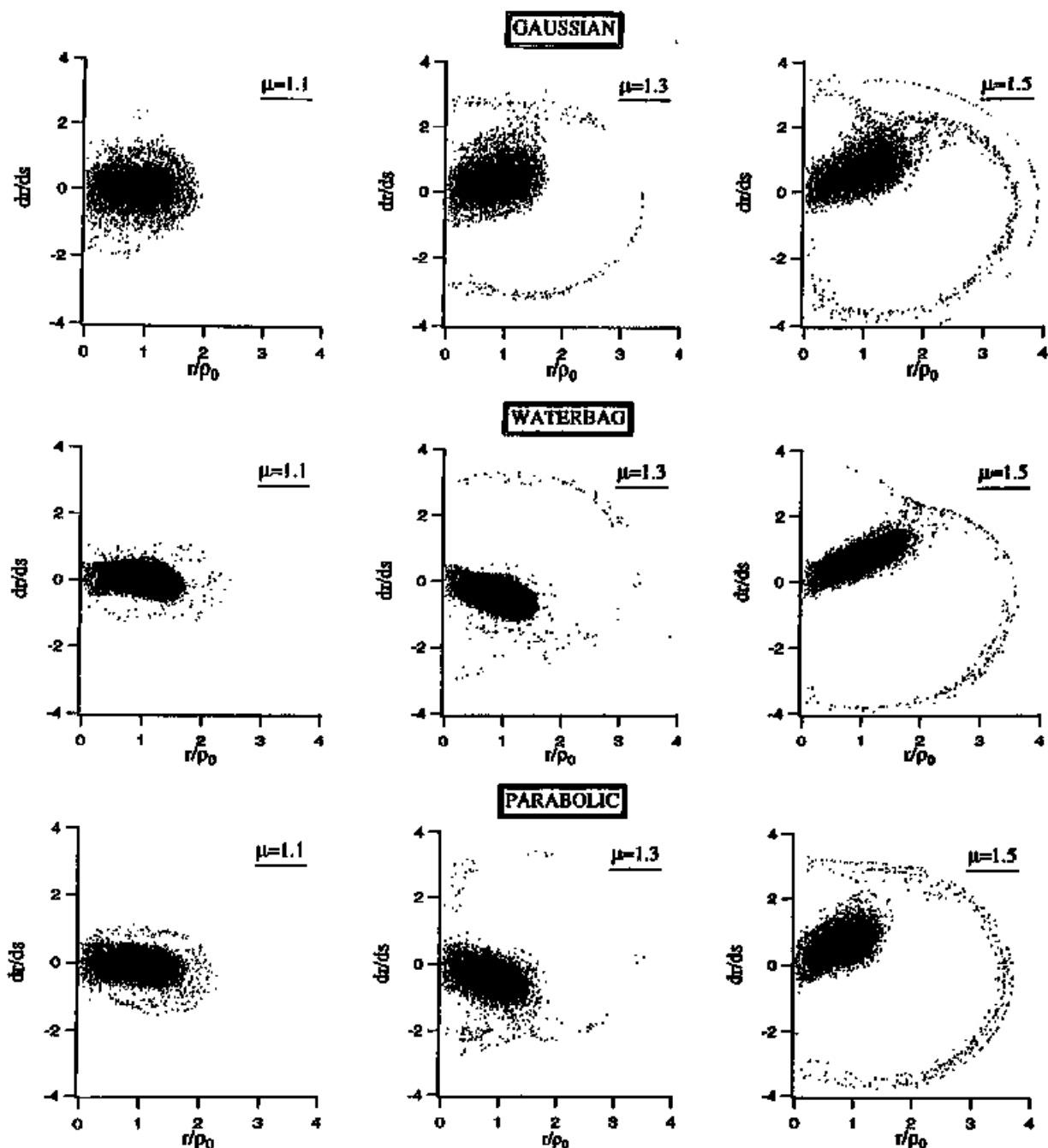


図6. 不整合のあるビームの動径方向の位相空間分布。 $\eta=0.3$ の条件のもとで得られた、20 プラズマ波長輸送した後の分布。3つの異なる大きさの不整合、すなわち、 $\mu=1.1$ 、 $\mu=1.3$ 、 $\mu=1.5$ の場合について、それぞれ結果を示してある。

てさえビームハローの形成が見られる。

次に、不整合のある場合を見てみよう。図6は、3つの異なるミスマッチファクターをもつビームを20 プラズマ波長輸送したあとの位相空間上での分布である。これらのビームのチューンディプレッションは0.3である。この図から、初期分布の形や不整合の大きさに関わらず、ハローが形成されていることがわかる。たいていの場合、ハロー粒子はビーム核のまわりに一様に分布するのではなく、いくつかの特定の軌道に沿って進み、狭いバンドを形成しているのはたいへん興味深い。この傾向は、明らかに、初期の不整合の大き

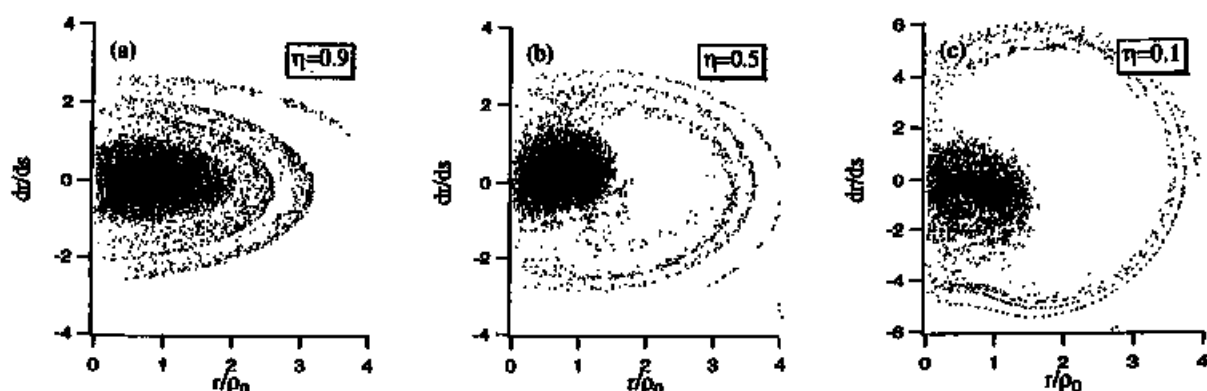


図7 不整合のあるビームの動径方向の位相空間分布。 $\mu=1.5$ の条件のもとで得られた、20 プラズマ波長輸送した後の分布。3つの異なる大きさのビーム密度、すなわち、 $\eta=0.9$ 、 $\eta=0.5$ 、 $\eta=0.1$ の場合について、それぞれ結果を示してある。 $\eta=0.1$ の場合は縦軸のスケールが違うことに注意してほしい。

さが大きくなるほどはっきりとしてくる。また、大きな不整合があるときには、このハローリングの半径が大きくなることがわかる。

図7は、同じ大きさの不整合すなわち $\mu=1.5$ をもつが、異なるチューンディプレッションをもつガウスビームについて、20 プラズマ波長輸送した後の位相空間上での分布を示したものである。この図から、ビーム密度の低い領域においても、かなり強度の大きいハローが形成されることがわかる。 $\eta=0.1$ のケースでは、振幅の大きなハローリングだけでなく、ビーム核の周辺部に密度の低いビーム雲が存在することは特筆に値する。ハローの最大振幅はチューンディプレッションによってほとんど変化しないが、 $\eta=0.1$ のケースでは、ビームが p_r 方向に広がるため、かなり大きなエミッタンス増大が見られる。この効果は、図2(b)に見られたストカスティックなビーム核の不安定性によって説明できるかもしれない。

第3. 4節 ハロー粒子の起源

混乱を避けるために、まず最初に、「ビーム核」という言葉が何を意味するのかをはっきりとさせておく必要がある。実際、この言葉は、実空間において粒子密度の大きい領域を指すのにしばしば用いられるが、ハロー粒子は、ベータトロン振動の過程で、実空間で定義されたビーム核中に存在しうるので、このような定義は適切でないと考えられる。そのかわり、我々は、位相空間上で粒子密度の大きい領域をビーム核ということとする。第3. 3節で示したシミュレーション結果を見ればわかるように、位相空間上でビーム核とハローを区別することは比較的容易である。

しかし、ここで「ハロー粒子は位相空間上で常にビーム核の外側に存在しているのか」という疑問が生じる。この疑問に答えるために、最終的にハローを形成した粒子の時間発展を逆にたどって、これらの粒子の初期位置を調べてみた。例として、図8(a)で示したケースを考えてみる。図8(a)は、不整合のあるパラボリックビームを20 プラズマ波長輸送した後の位相空間上での分布を示したものである。個々の粒子のベータトロン振動の振幅の最大値を調べることによって、このビームのハロー部分を取り出し、図8(b)を得た。この

とき、輸送中にベータトロン振動の振幅が一度でも $1.3 \times \sqrt{2} \rho_0$ を越えた粒子をハローとした。そうして、この選り出した粒子の時間発展を遡ることによって、これらの粒子が初期においてどの位置にあったかを調べた。その結果を示したのが図8(c)である。この図から、ハローは、主に初期において位相空間分布における周辺部分に位置していた粒子によって形成されていることがわかる。パラメーターを変えて多数のシミュレーションを行った結果、初期分布の形や不整合の大きさ、ビーム密度に依らず、このような傾向があることが確かめられた。このことは、不整合の大きいときでもビーム核がほぼ安定であることを示唆している。

この結論は、図9に示したシミュレーション結果によって、さらに裏付けられる。図9は、図8(a)のビーム核の部分だけを取り出し、それを初期分布として輸送したときのビームの時間発展の様子を示したもので

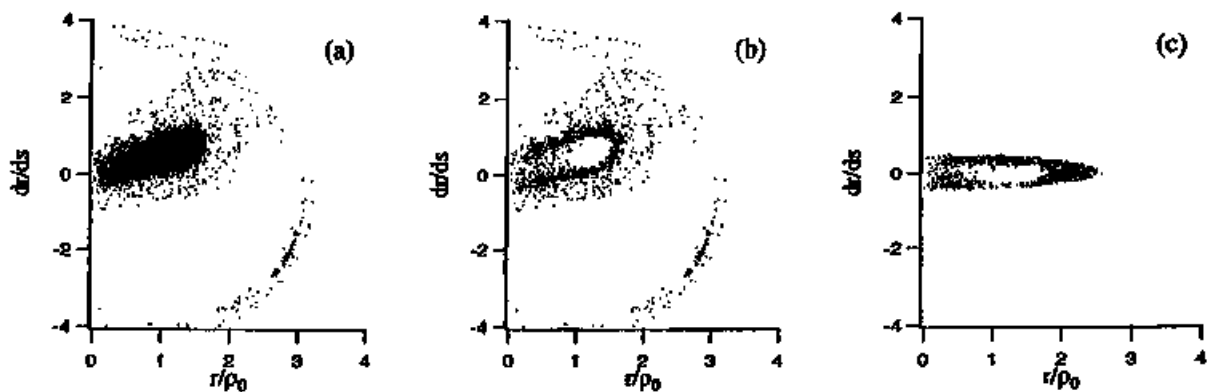


図8. 不整合のあるパラボリックビームの動径方向の位相空間分布。(a)は、 $\eta=0.2$ 、 $\mu=1.3$ の条件のもとで得られた、20 プラズマ波長輸送した後の分布。(b)は、(a)のうち、ハロー部分だけを取り出したもの。ここで、ベータトロン振動の振幅が $1.3 \times \sqrt{2} \rho_0$ を越えた粒子をハロー粒子とした。これは、第3.6節で導入するコアファクターを1.0にした場合に相当する。(c)は、(b)の粒子の時間発展を遡って得られたハロー粒子の初期位置である。

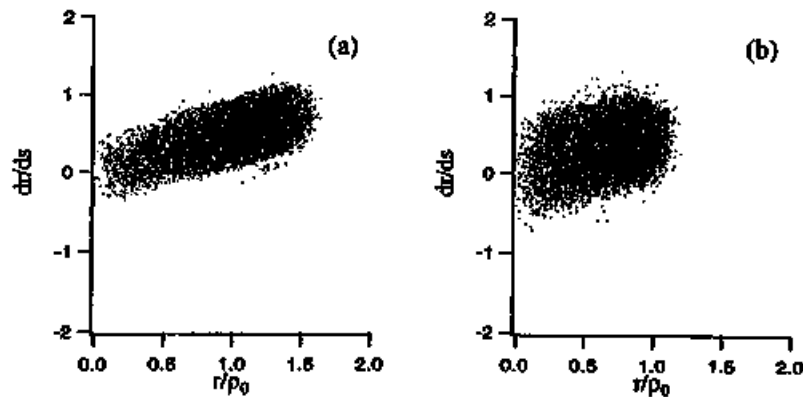


図9 ビーム核だけを取り出したビームの動径方向の位相空間分布。(a)は、図8(a)のビームから、図8(b)のハロー部分を取り除いて得られたビーム。(b)は、(a)のビームをさらに20 プラズマ波長輸送した後の分布。

ある。図9(a)に示したビームは、図8(a)のビーム核だけを取り出したものであり、このビームは20プラズマ波長の長さの輸送系を輸送すると、図9(b)のような状態になる。ハロー粒子を取り除いたことによって、図9に示したビームは、図8(a)に示した最初のビームに比べて、ビーム強度は16%減少しているが、ハローの再生は起こっていない。さらに、図8(a)に示したビームは初期のビームに比べて2倍近くエミッタンスが増大していたが、図9ではエミッタンス増大もほとんど見られない。

上で述べたようにビーム核がほぼ安定であることは、実用的な観点からいうと、少なくとも次の2つのことを意味する。まず第1に、そのことによって、ハロー強度を評価することが容易になるということである。実際、ビーム核が安定でなければ、ビーム核の粒子はいつでもハロー粒子になりうるため、ビーム核を構成する粒子とハローを構成する粒子を判別することが非常に難しくなる。このハロー強度の評価については、第3.6節で、より詳しく議論する。第2に、簡単なハロー除去システムでハローを除去できる可能性があるということである。

ハローを取り除く方法として、一つの可能性があるのは、ある程度の厚さをもったコリメーターを1つビームラインに挿入する方法である。ハローの一部分がベータトロン振動によって実空間におけるビーム核中に存在しうることを考慮に入れば、薄いコリメーターによって1度だけハローを除去してもハローのうち一部分しか取り除けないことは明らかである。もし、ビームがすでに飽和した状態に到達していれば、コリメーターの厚みは最小ですむが、この場合でも、完全にハロー粒子を取り除くためには、コリメーターの厚みは少なくともベータトロン波長の約半分にする必要がある。高密度ビームのベータトロン波長がかなり長いことを考えると、このコリメーターの厚みはかなり大きくしなければならないと考えられる。さらに、この方法では、コリメーターの壁面に生じる鏡像電荷の効果に十分注意しなければならない。したがって、この長いコリメーターによるハロー除去の実用性については、議論の余地がある。

もう一つの、おそらくより実現の可能性の高い方法として、いくつかのうすいコリメーターをビームラインに周期的に配置する方法が考えられる。コリメーターの材質や形状は、幾何学的な効果による航跡波 (geometrical wake field) および壁面の抵抗による航跡波 (resistive wake field) を最小にするように決めなければならない。このような方法でハローを完全に除去できるかどうかは明白でないが、少なくともハローの強度を著しく小さくできると考えられる。このマルチコリメーターシステムは、その簡便さゆえに、ハローを除去するシステムの一つの候補として、さらに研究を進める価値があると考えられる。このシステムの実用可能性については、第4.7節でさらに詳しく議論する。

第3.5節 ハローの最大半径

ハロー粒子がビーム中心からどれだけ離れた位置まで到達するかを知ることは、実用的な観点から非常に重要である。我々のシミュレーションによると、ほとんどのビームは20プラズマ波長の距離に到達するまでに、ほぼ飽和した状態に達する。そこで、我々はそこに到るまでの間で、ビームを構成する粒子のうち最もベータトロン振動が大きかった粒子の最大振幅を、ビームの最大半径と考えることとした。図10は、整合されたビームのハローの最大半径を整合された等価なKVビームの半径、すなわち $R_0 = \sqrt{2}\rho_0$ でスケールした値を表したものである。この図から、最大半径はビーム密度にあまり依らないことがわかる。すでに、図4で示したように、 $\eta=0.3$ では3つのすべての分布のビームにおいてハローの形成が見られるが、ビームの最大

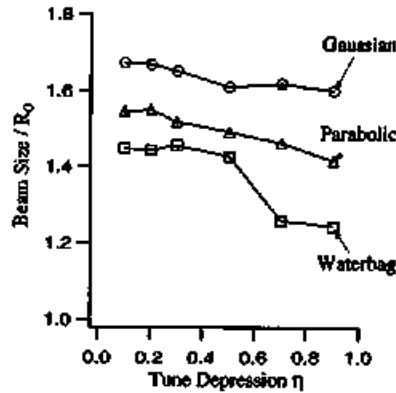


図 10. 整合のとれたビームの最大半径のビーム密度に対する依存性。縦軸は、ビームの最大半径を整合された等価なKVビームの半径 $R_0 = \sqrt{2\rho_0}$ でスケールしたもの。

半径は、高密度領域でも、顕著なハローの形成が見られない低密度領域とほとんど変わらない。このことは、ビームが初期に rms 整合されていれば、ハローの形成はほとんど実用上問題にならないことを意味している。

図 10 に見られるビームの最大半径のわずかな分布依存性は、単に初期のビームサイズの違いに起因するものなので、本質的に重要ではない（例えば、図 3 の上の 3 つの図を比較せよ）。実際、 $\sqrt{2\rho_0}$ のかわりに初期のビームサイズに対する比をとると、この結果は分布に対してほとんど依存しなくなる。また、高密度領域においても、ビームサイズの増大率は、3 つすべての分布についてたいいていの場合 10% よりも小さいことがわかった。

次に、不整合のあるビームの最大半径を示したものが図 11 である。ここで、縦軸はビームの最大半径を $\mu\sqrt{2\rho_0}$ でスケールしたものをとっている。このスケールされたハローの半径とビーム密度の間には、やはり

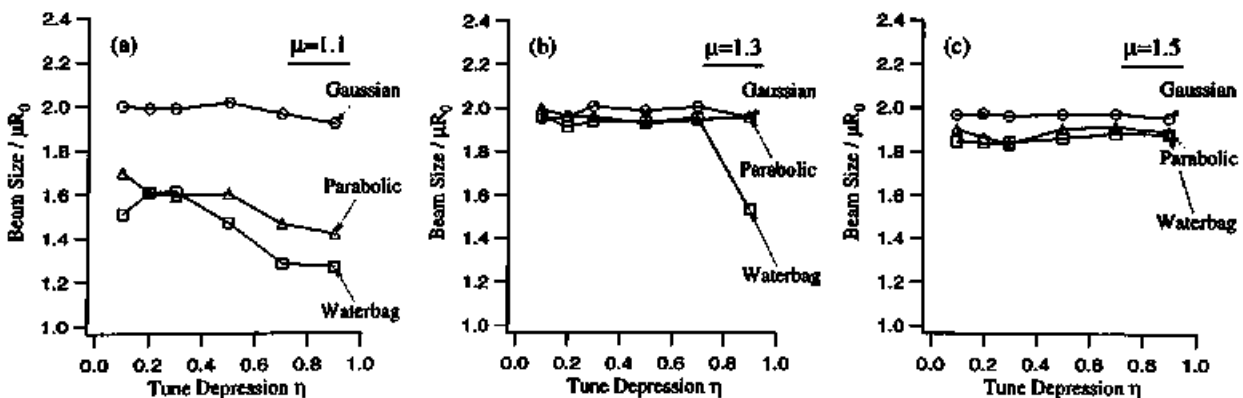


図 11 不整合のあるビームの最大半径のビーム密度に対する依存性。縦軸は、ビームの最大半径を等価な KV ビームの半径 $\mu R_0 = \mu\sqrt{2\rho_0}$ でスケールしたもの。

明確な相関は見あたらない。それどころか、非常に興味深いことに、不整合の度合いがある程度以上に大きくなると、初期の分布に対する依存性までもがなくなってしまう。このことは、図6の位相空間上での分布を見ることによって直接確かめられる。図6では、不整合の度合いを大きくするとハローは大きくなっていくように見えるが、これは単に μ に比例して多くなっているだけであり、 μ でスケールすれば、 μ が1に近い場合を除き、ほぼ一定となる。図11(b)と図11(c)に見られるように、このスケールされたハローの半径が一定であることから、ハローの半径は、分布やビーム密度に依らず、初期のrmsビーム半径 $\mu\sqrt{2}\rho_0$ のほぼ2倍であると結論できる。この結果は、KVモデルに基づく粒子-核法によって導き出されたハローの最大半径の経験式[32]とよく一致する。

第3.6節 ハロー強度

第3.4節で確かめられたように、ビーム核がほぼ安定であることから、ハローの強度は比較的容易に見積もることができる。我々は、ビーム核の部分とハローの部分とを分離するために、実空間である半径をもつ円を考え、粒子がこの円の外側に一度でも出たら、その粒子をハロー粒子とみなすこととした。ここで、コアファクター G を導入し、この円の半径を $r=G\mu\sqrt{2}\rho_0$ とした。しかし、この手続きはビーム密度の自発再構成が終わるまでは、行い始めるべきでないことに注意しなければならない。そうしなければ、初期に実空間でビームのエッジ付近に位置しており、ビーム密度の自発的再構成によってビーム核を構成するようになる粒子の一部をハロー粒子とカウントし、ハロー強度を過大評価するおそれがある。いったんビームがビーム密度の自発的再構成によって一様分布に近い状態になってしまえば、このような過大評価の可能性について心配する必要はなくなる。ビーム密度の自発的再構成は非常に短い時間の間に起こることが知られている[12,13]ので、我々は、ビームが5プラズマ波長進んだ位置からハロー判別の手続きを始めることとした。

上で述べたような方法で求められたハロー強度を示したのが図12である。上段の3つの図は $G=1.2$ の場合を、中段の3つの図は $G=1.3$ の場合を、下段の3つの図は $G=1.4$ の場合を表したものである。左側の図、すなわち $\mu=1.1$ の場合については、あきらかにコアファクターが小さくなるとハロー強度が大きくなるという傾向が見られる。 $G=1.2$ の場合は、予想に反して、高密度領域より低密度領域の方がハロー強度が大きくなっている。しかし、これは単に低密度領域ではビーム核の半径が大きいことによるものだと考えられる。

中段および下段の図の $\mu=1.5$ の場合は、お互いに非常によく似ている。このことは、密度によって多少異なるが、不整合の大きなビーム核の最大半径がほぼ $1.3\times\mu\sqrt{2}\rho_0$ であることを示唆している。 $\mu=1.5$ の場合のハロー強度の全密度領域の平均は、ガウスビームについては9% ($G=1.2$)、8% ($G=1.3$)、7% ($G=1.4$)、パラボリックビームについては6% ($G=1.2$)、6% ($G=1.3$)、6% ($G=1.4$)、ウォーターバグビームについては5% ($G=1.2$)、3% ($G=1.3$)、3% ($G=1.4$)であった。

線形加速器の最小のアーチャーを決めるときも、ハロー除去システムの設計をするときも、個々の粒子のベータトロン振動の実空間における振幅が問題となるので、ある特定のコアファクターによってハロー強度を評価することは実用的な観点から重要である。しかし、上に述べたビーム核の半径の密度依存性を考慮に入れて、ハロー部分だけの強度を評価することも意義がある。図13は、コアファクターの値を調節することによってハロー部分だけを取り出し、その強度を求めた結果を表したものである。このコアファクターの値の選び方には多少任意性があるが、ハロー粒子と判定された粒子の位相空間上での位置をプロットして

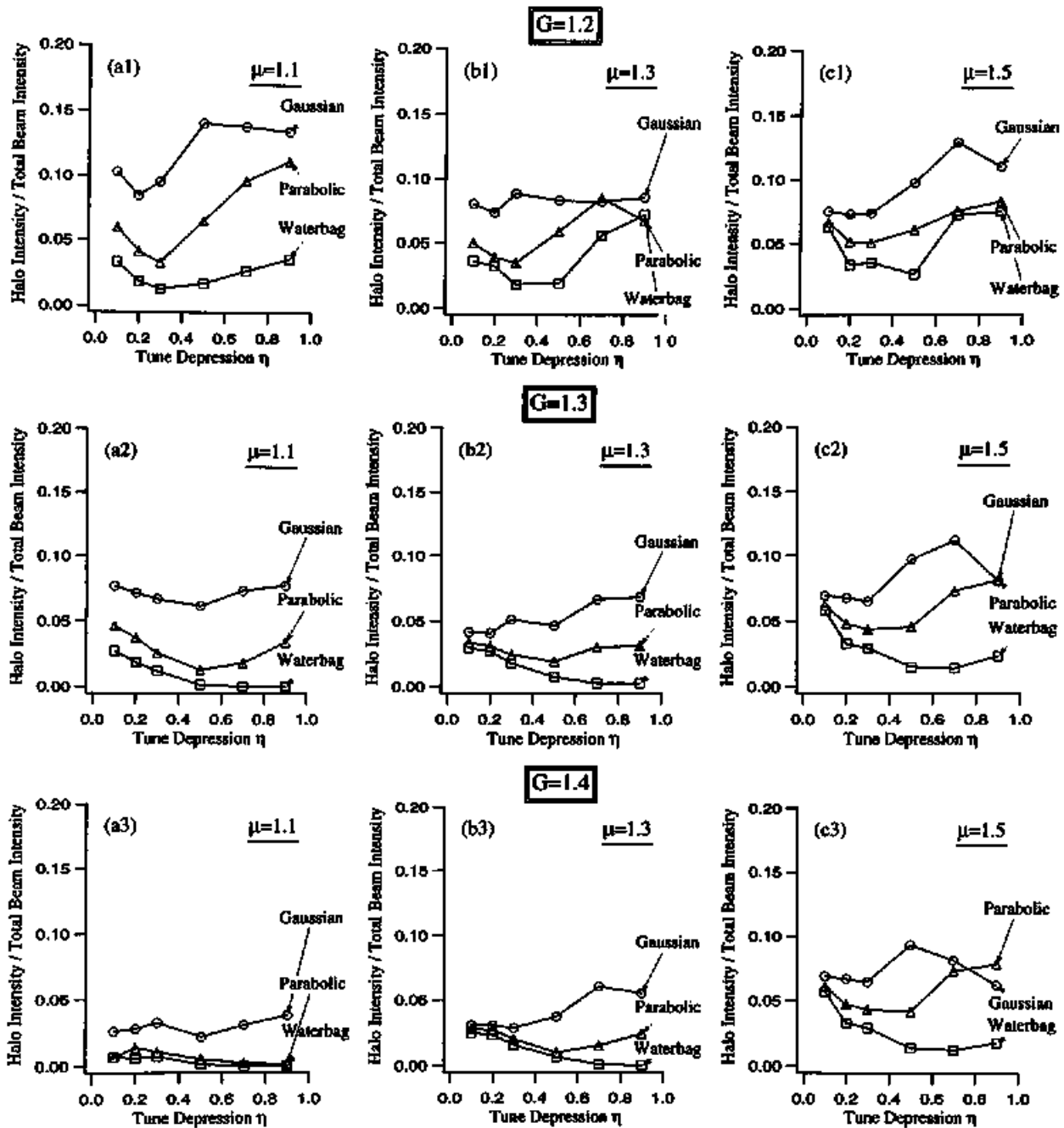


図 12. ハロー強度のビーム密度に対する依存性。縦軸は、ハロー強度を全ビーム強度でスケールしたもの。ハロー強度は 20 プラズマ波長輸送したところで、3つの異なる大きさのコアファクター、すなわち、 $G=1.2$ 、 $G=1.3$ 、 $G=1.4$ によって評価している。

みることによって、コアファクターとして適当な値をおおよそ知ることができる。例えば、図 8(b)では、コアファクターとして 1.0 を採用しているが、図より明らかにビーム核の周辺部もハローと判定されており、コアファクターの値が少し小さすぎるのがわかる。我々は、コアファクターの値を 1.2 から 1.5 の間で調節す

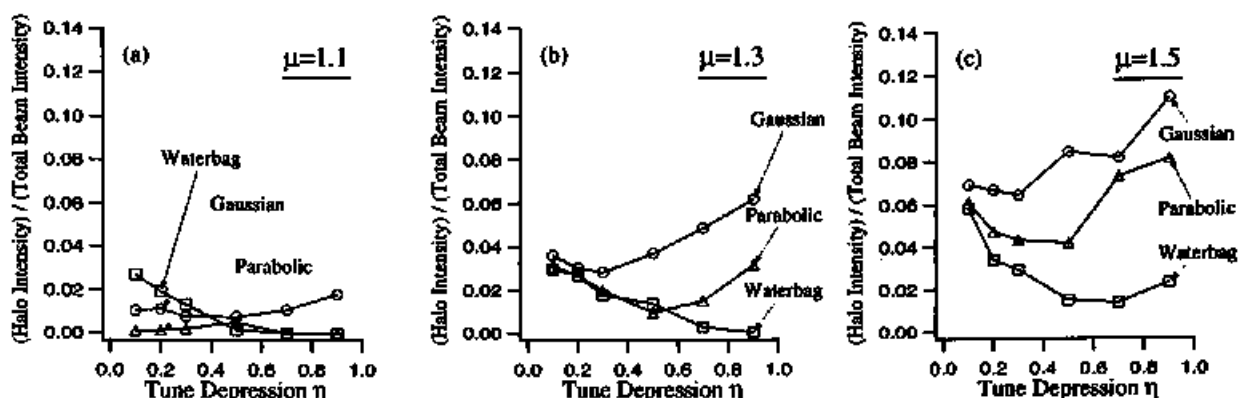


図 1.3. ハロー強度のビーム密度に対する依存性。縦軸は、ハロー強度を全ビーム強度でスケールしたもの。ハロー強度は 20 プラズマ波長輸送したところで評価している。このとき、コアファクターを、ビーム核半径のビーム密度依存性を考慮に入れて、ハローの部分だけを取り出すように調節している。ここで、高密度領域でビーム核のまわりに形成されるビーム雲の部分は、第 4. 6 節で詳しく述べるように、その大部分が安定で、振幅の大きいハローリングの形成に寄与しないことから、ハローと考えないこととした。

表 1 図 1.3 で採用したコアファクターの値 (ガウスビームの場合)

	$\eta=0.1$	$\eta=0.2$	$\eta=0.3$	$\eta=0.5$	$\eta=0.7$	$\eta=0.9$
$\mu=1.1$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
$\mu=1.3$	1.3~1.4	1.4	1.4	1.4	1.5	1.3~1.4
$\mu=1.5$	1.4	1.4	1.4	1.4~1.5	1.4	1.2

表 2. 図 1.3 で採用したコアファクターの値 (ウォーターバグビームの場合)

	$\eta=0.1$	$\eta=0.2$	$\eta=0.3$	$\eta=0.5$	$\eta=0.7$	$\eta=0.9$
$\mu=1.1$	1.3	1.2	1.2	1.3	1.3	1.3
$\mu=1.3$	1.3	1.3	1.3	1.2~1.3	1.3	1.3
$\mu=1.5$	1.3	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3

表 3. 図 1.3 で採用したコアファクターの値 (パラボリックビームの場合)

	$\eta=0.1$	$\eta=0.2$	$\eta=0.3$	$\eta=0.5$	$\eta=0.7$	$\eta=0.9$
$\mu=1.1$	1.5	1.5	1.5	1.4	1.4	1.4
$\mu=1.3$	1.3~1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.3
$\mu=1.5$	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.3

ることによって図13を得た。このとき採用したコアファクターの値をまとめたものが表1～3である¹²。このようにして得られた図13から、不整合の度合いが大きくなるとハロー強度が大きくなることは明らかである。さらに、ハロー強度は、ビーム密度にほとんど依存しないということもわかる。なお、第4.6節で示すように、高密度領域でビーム核の近傍に見られるビーム雲を構成する粒子は安定で、振幅の大きいハローリングの形成に寄与しないことから、図13では、これらの粒子はハローの一部とは考えていない。さらに、この図13から、ウォーターバグビームが他の2つの分布に比べて比較的安定であることがわかる。実際、ミスマッチファクターが1.5のときでさえ、密度がそれほど高くなければ、ハロー形成によるエミッタンス増大は10%以下にとどまる。この分布依存性を説明する鍵は、初期ビームのもつ非線形な電場のエネルギーが分布によって異なることであると考えられる[12]。ウォーターバグビームの非線形な電場のエネルギーは他の2つの分布に比べて非常に小さいことが知られている。この3つの分布の中では、ガウスビームが最も大きな非線形な電場のエネルギー（ウォーターバグビームの約7倍）をもち、パラボリックビームが次に大きな非線形な電場のエネルギー（ウォーターバグビームの約3倍）をもっている。このことが、おそらくガウスビームがもっとも強度の高いハローをもつことの原因であると考えられる。

最後に、ここで述べたのと同じ原理によって、円形のイオン加速器においてもハローが形成される可能性があることは触れておく価値がある。実際、図14に示したように、不整合の度合いが大きいときには、非常に低密度（ $\eta=0.99$ ）の場合でさえ、顕著なハローが形成されることが確かめられた。

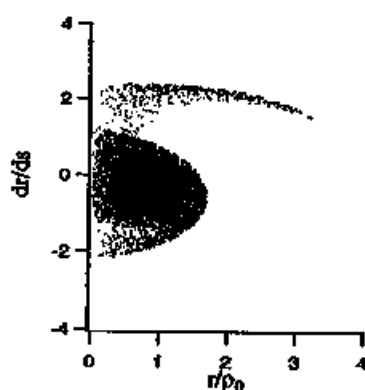


図14. 非常に低密度のパラボリックビームの動径方向の位相空間分布。 $\eta=0.99$ 、 $\mu=1.5$ の条件のもとで得られた、20プラズマ波長輸送した後の分布。

¹² 表1～3中で、1.3～1.4と表記してある部分については、 $G=1.3$ を採用して得られたハロー強度と $G=1.4$ を採用して得られたハロー強度の平均をハロー強度とした。1.2～1.3、1.4～1.5についても同様。

第4章 粒子シミュレーション（周期的な収束系）

この章では、前章で用いたシミュレーションコードをより一般化し、外部収束力が周期的に変動する場合に適用できるように拡張することにより、周期的な収束系を輸送されるビームにおけるビームハロー形成過程の研究を行う。ビームサイズの不整合に起因する脈動モードの振動を行うビームに特に重点をおいて研究するために、ソレノイドを用いた周期的な収束系を輸送される軸対称なビームだけを考える。我々のシミュレーションをより意味のあるものにするために、ふたたび、KV分布をもつビームのかわりに、より現実的なガウス分布、ウォーターバグ分布、パラボリック分布の3つのタイプの分布を初期分布とするビームを考える。

第4.1節 シミュレーション方法

今、我々が考えている系のハミルトニアンは次のような形で与えられる：

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \kappa(s)^2 r^2 + \frac{q}{mu^2} V_{sc}(r, s) \quad (4.1)$$

ここで、 $\kappa(s)$ は収束力の空間的な変化を表す周期関数である。一様な収束系の場合と同様、 $p_\theta = L$ は運動の定数となることから、スケールされた座標を用いることによって、各粒子の動径方向の運動方程式は次のように表すことができる：

$$\frac{d^2 \hat{r}}{d\hat{s}^2} = -\hat{\kappa}(\hat{s})^2 \hat{r} + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^3} + \hat{K} \frac{\xi(\hat{r}; \hat{s})}{\hat{r}} \quad (4.2)$$

ここで、独立変数は s_r を収束系の周期として $\hat{s} = s/s_r$ に変換してある。また、 $\hat{r} = r/\sqrt{\epsilon s_r}$ 、 $\hat{K} = K s_r/\epsilon$ 、 $\hat{L} = L/\epsilon$ 、 $\hat{\kappa} = \kappa s_r$ である。周期的階段関数 $\hat{\kappa}(\hat{s})$ の周期は1であり、そのステップの大きさは収束力の強さに相当する。粒子によって異なる値をとる定数である \hat{L} は、一様な収束系の場合と同様、いったん位相空間 (x, p_x, y, p_y) で初期分布を生成してしまえば、関係式 $\hat{L} = (x p_y - y p_x)/\epsilon$ によって簡単に定められる。その後、十分に短い時間間隔の中で $\xi(\hat{r}; \hat{s})$ が一定であると近似して、個々のシミュレーション粒子について、式(4.2)を数値的に積分した。数値積分には、一様な収束系の場合と同様、可変ステップサイズを導入した2次のシンプレクティックな積分アルゴリズムを用いた。

先に導入したスケールした座標を用いると、エンベロープ方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{d^2 \hat{\rho}}{d\hat{s}^2} = -\hat{\kappa}(\hat{s})^2 \hat{\rho} + \frac{\hat{K}}{2\hat{\rho}} + \frac{\epsilon^2}{4\hat{\rho}^3} \quad (4.3)$$

\hat{K} と $\hat{\kappa}(\hat{s})$ を定めれば、整合のとれたビームの r m s 半径 $\hat{\rho}_0(\hat{s})$ は式(4.3)を数値的に積分することによって得ら

れる。座標 z の原点を収束用ソレノイドの中央にとったことから、 $\hat{\rho}_0(0)$ が整合されたビームの rms 半径の最大値になることに注意しておいてほしい。

ここで、空間電荷効果を無視したときの 1 収束周期あたりのベータatron振動の位相の進み (zero-current phase advance) σ_0 と空間電荷効果を考慮に入れたときの 1 収束周期あたりの位相の進み σ (phase advance) を導入しよう。一般に、空間電場による発散力のため、 σ は σ_0 よりも小さい。このシミュレーションにおける独立なパラメータは、初期分布の形と初期に与える不整合の大きさを除けば、 \hat{K} と $\hat{K}(z)$ だけであるが、ビーム密度の大きさを表す \hat{K} は $\eta = \sigma/\sigma_0$ と、収束力の強さを表す $\hat{K}(z)$ は σ_0 と関係づけることができる。

簡単のため、以後、この章ではハット ($\hat{}$) は省略するものとする。

第 4. 2 節 シミュレーション条件

次節以降に結果を与えるシミュレーションでは、シミュレーション粒子の数を 10^4 、 $\rho_0^{\text{max}} = \rho_0(0)$ あたりの動径メッシュ数を 100 とした。さらに、積分ステップサイズを $1/2^9$ とした。先に述べたように、我々は、数値積分の精度を上げるために可変ステップサイズアルゴリズムを採用しているため、このステップサイズは実際の積分ステップサイズの最大値に相当することに注意してほしい。最小のステップサイズは $1/2^{23}$ とした。これらのパラメータは、ガウスビームを用いた予備的なシミュレーションの結果に基づいて、一様な収束系の場合と同様に決定された。

第 4. 3 節 脈動ビームの安定性

まず、最初に、整合のとれたビームを考えてみよう。図 1 5 は、比較的低密度 ($\eta=0.7$) のビームの位相空間上での分布を表したものである。上の 3 つの図は初期分布を、下の 3 つの図は 150 収束周期輸送した後の分布を表している¹³。すべてのケースについてビーム密度の自発的再構成によるわずかなビーム核の変形が見られるが、この密度領域ではビームは安定に見える。実際、これらのケースでは、エミッタンス増大はほとんど観測されていない。

図 1 6 に示した比較的高密度 ($\eta=0.3$) の場合では、状況はもっと複雑なものとなる。どの初期分布から出発した場合も、多かれ少なかれビーム核のまわりにそれを取りまくハローが形成されている。これらの結果は、一様な収束系を輸送されるビームについて、第 3. 3 節で得られた結果と本質的に同じものである。周期的な収束系における整合されたビームは、ビームエンベロープが周期的に変動するため、一様な収束系における不整合のあるビームの挙動と同様の挙動を示すと考えられていた[7]。しかし、ここで得られた結果から、収束力の周期性に起因する整合されたビームエンベロープの周期的な変動は、ハロー形成過程において本質的な役割を果たしていないと結論づけることができる。

次に、不整合のある場合を見てみよう。図 1 7 は、3 つの異なるミスマッチファクターをもつビームを 150 収束周期輸送したあとの位相空間上での分布である。これらのビームのチューンディプレッションは 0.3 であ

¹³ ほとんどのビームは、150 収束周期の距離に到達するまでに、ほぼ飽和した状態に達する。

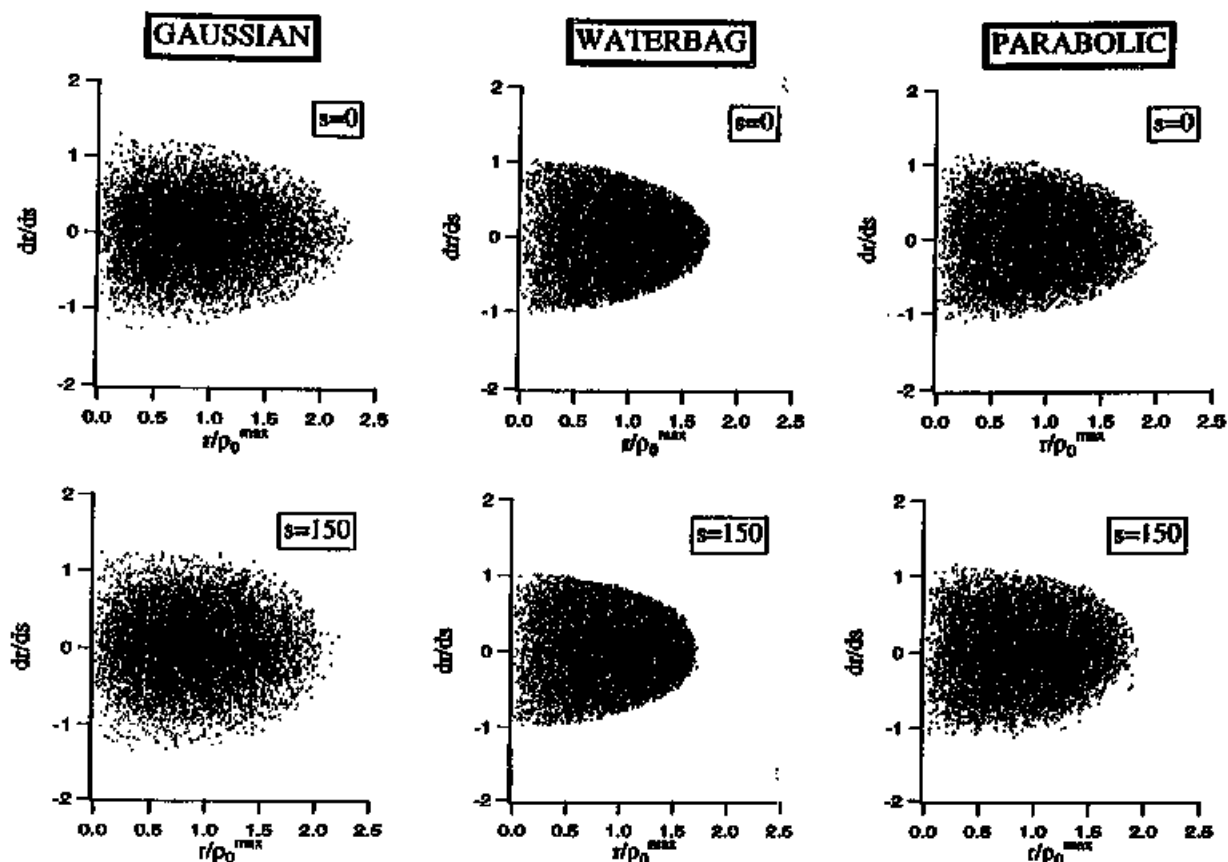


図 15. 整合されたビームの動径方向の位相空間分布。 $\eta=0.7$ の条件のもとで得られたもの。上段は、初期分布を、下段は150収束周期輸送した後の分布を表す。

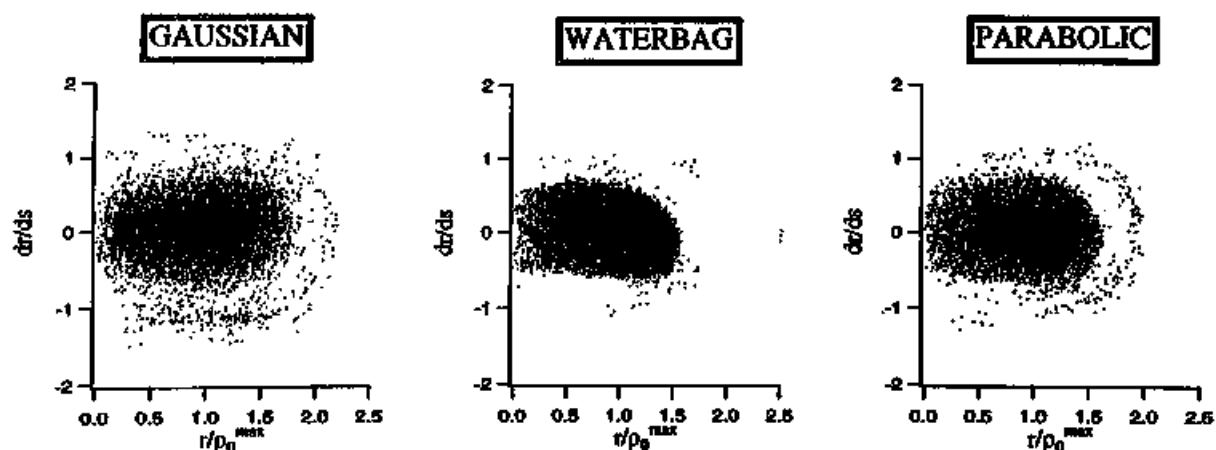


図 16. 整合されたビームの動径方向の位相空間分布。 $\eta=0.3$ の条件のもとで得られた、150収束周期輸送した後の分布。

る。この図から、初期分布の形や不整合の大きさに関わらずハローが形成されていることがわかる。図 18 は、同じ大きさの不整合すなわち $\mu=1.5$ をもつが、異なるチューンディプレッションをもつガウスビームについて、150 収束周期輸送した後の位相空間上での分布を示したものである。この図から、ビーム密度の低い

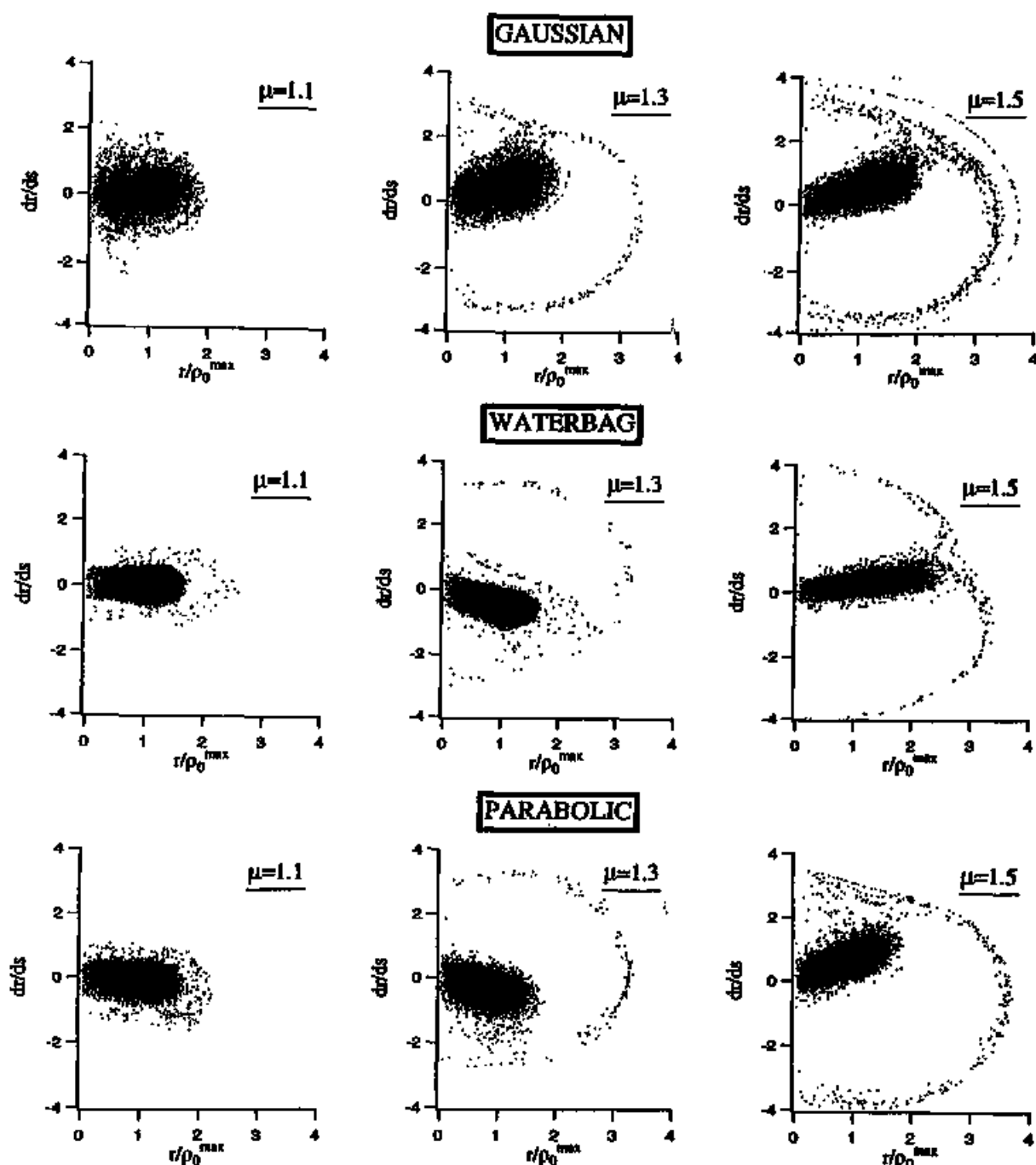


図 17 不整合のあるビームの動径方向の位相空間分布。 $\eta=0.3$ の条件のもとで得られた、150 収束周期輸送した後の分布。空間電荷効果を見捨てたときの位相の進みは $\sigma_p=60^\circ$ に固定されている。3 つの異なる大きさの不整合、すなわち、 $\mu=1.1$ 、 $\mu=1.3$ 、 $\mu=1.5$ の場合について、それぞれ結果を示してある。

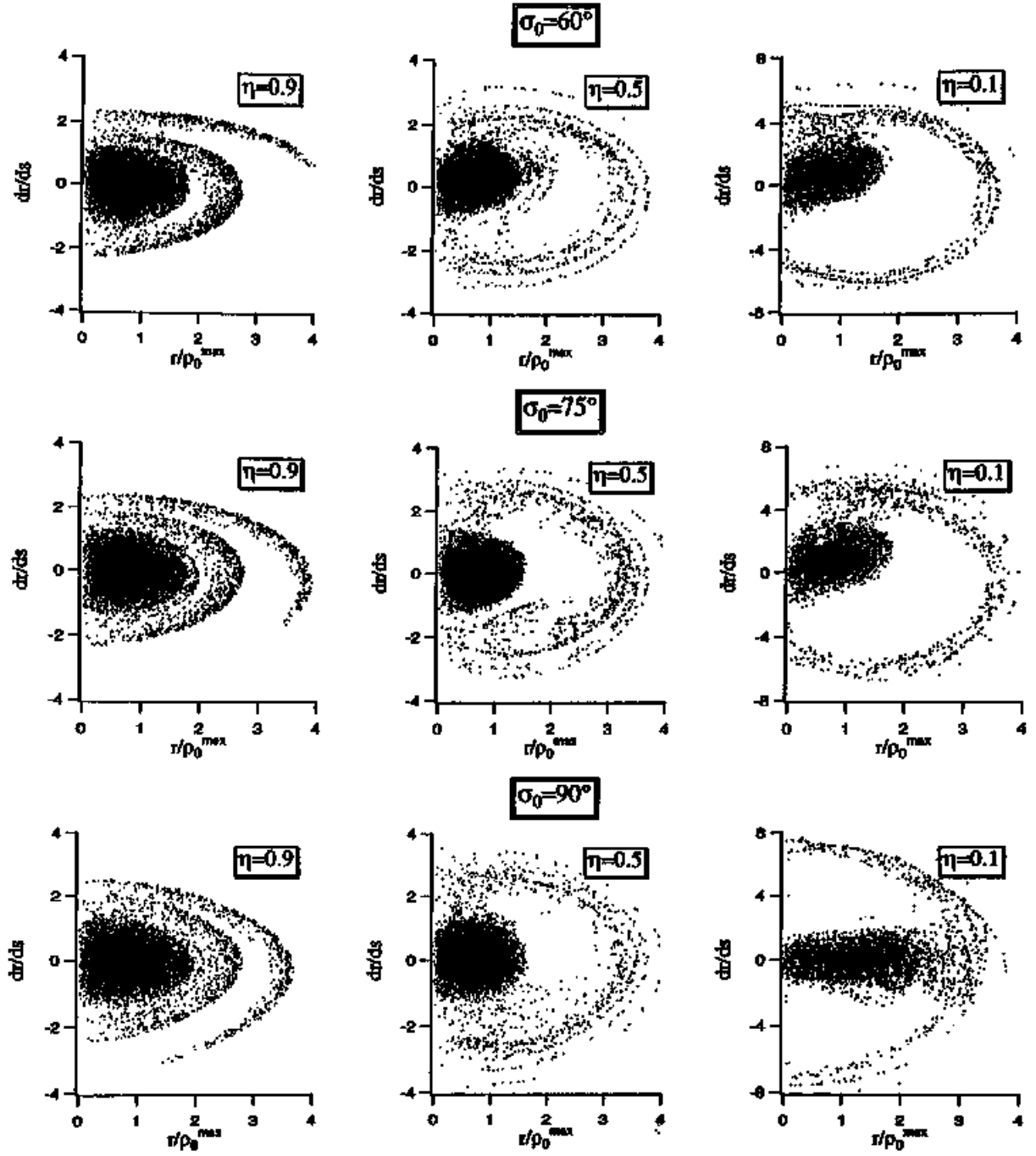


図 18. 不整合のあるビームの動径方向の位相空間分布。 $\mu=1.5$ の条件のもとで得られた、150 収束周期輸送した後の分布。3つの異なる空間電荷効果を見視したときの位相の進み、すなわち、 $\sigma_0=60^\circ$ 、 $\sigma_0=75^\circ$ 、 $\sigma_0=90^\circ$ の場合について、それぞれ3つの異なる大きさのビーム密度、すなわち、 $\eta=0.9$ 、 $\eta=0.5$ 、 $\eta=0.1$ の場合の結果を示してある。 $\eta=0.1$ の場合は縦軸のスケールが違ふことに注意してほしい。

領域においても、かなり強度の大きいハローが形成されることがわかる。また、この図から、ビームが第4、5節で詳しく述べる構造共鳴による不安定領域に入らない限り、位相空間上での分布の時間発展の様子が、 σ_0 に依存しないことは明らかである。ここで、図17と図6、図18と図7をそれぞれ見比べてほしい。これらの図から、周期的な収束系における不整合のあるビームの振る舞いが、一様な収束系の場合と著しく類似していることがよくわかる。この著しい類似性は、周期的な収束系でハローが形成されるメカニズムと一様な収束系でハローが形成されるメカニズムが本質的に同じであることを強く示唆している。

第3、4節で示したように、一様な収束系を輸送されるビームについては、ハローを構成する粒子は、動径方向の位相空間において、常にビーム核の外側に存在することがわかった。様々なパラメーターのもとでシミュレーションを行った結果、周期的な収束系を輸送されるビームについても、同様の結論が成り立つことがわかった。例として、不整合のあるパラボリックビームをふたたびとりあげることにする。図19(a)は、150収束周期輸送された後のパラボリックビームの位相空間上での分布を示したものであり、中央の密度の高い部分を取り囲む大きなハローリングが形成されていることが、はっきりと見て取れる。このビームを構成する粒子のうちベータトロン振動の振幅が輸送中一度でも $1.3 \times \sqrt{2} \rho_0^{\text{max}}$ を越えた粒子だけをプロットしたものが図19(b)である。一様な収束系を輸送されるビームの場合と同様、図19(b)において、ビーム核の部分が空白になっていることに注意してほしい。このことは、ほとんどのハロー粒子がビーム核の領域に決して入ってこないことを意味している。これらのハロー粒子の数が、輸送系の出口に到達するまでに、ほぼ最大値に到達することを考慮に入れば、図19(b)は、ビーム核がほぼ安定であることを強く示唆していると考えることができる。さらに、図19(b)に示した粒子の時間発展を遡ってその初期位置を求めた図19(c)より、ハローのほとんどが、位相空間における周辺部分に位置していた粒子によって形成されていることがわかる。

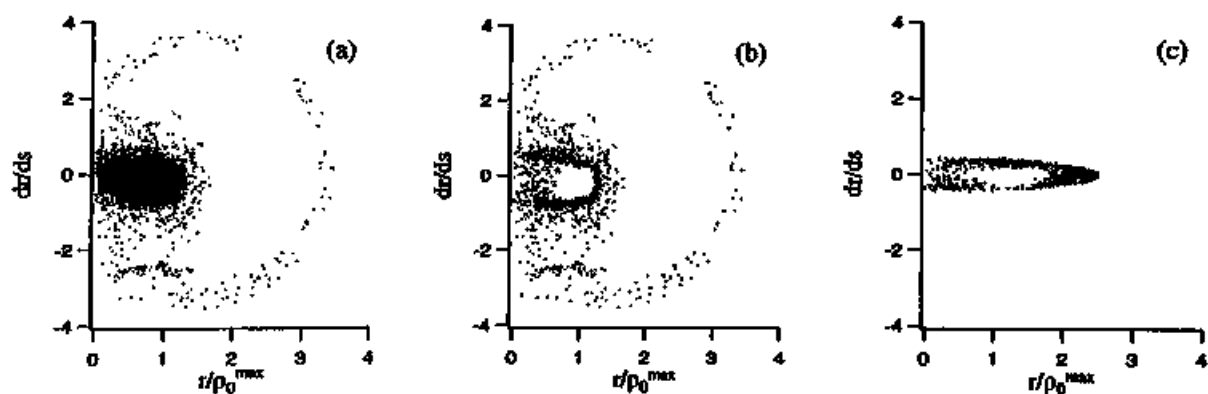


図19. 不整合のあるパラボリックビームの動径方向の位相空間分布。空間電荷効果を見捨てたときの位相の進みは $\sigma_0=60^\circ$ に固定されている。(a)は、 $\eta=0.2$ 、 $\mu=1.3$ の条件のもとで得られた、150収束周期輸送した後の分布。(b)は、(a)のうち、ハロー部分だけを取り出したもの。ここで、ベータトロン振動の振幅が $1.3 \times \sqrt{2} \rho_0^{\text{max}}$ を越えた粒子をハロー粒子とした。これは、コファクターを1.0にした場合に相当する。(c)は、(b)の粒子の時間発展を遡って得られたハロー粒子の初期位置である。

第4 4節 ハローの最大半径とハロー強度

第3章で行われたシミュレーションの結果から、一様な収束系を輸送されるビームについては、ガウスビームの場合に形成されるハローが、他の2つのビームの場合に形成されるハローに比べて、ハローの強度、最大半径ともに最も大きいことがわかった。同じ傾向が、周期的な収束系を輸送されるビームについても確かめられたため、この節では、ガウスビームについて得られた結果だけを示すこととする。

まず最初に、ハローの最大半径のビーム密度に対する依存性を示した図20と図21を見てほしい。これらの図から、ハローの最大半径が σ_0 に依存しないことは明らかである。さらに、初期のrmsビーム半径 $\mu\sqrt{2}\rho_0^{\max}$ でスケールされたハローの最大半径は、ビーム密度の大きさや不整合の大きさに関わらず、ほぼ2になることがわかった。このことは、一様な収束系を輸送されるビームの場合と、驚くほど一致している。

次に、ハロー強度を評価するために、第3.6節で導入したコアファクターをふたたび導入する。すなわ

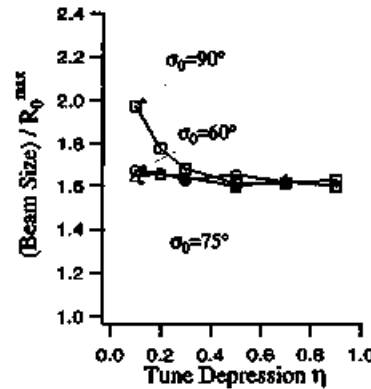


図20. 整合のとれたガウスビームの最大半径のビーム密度に対する依存性。縦軸は、ビームの最大半径を等価なKVビームの半径 $R_0^{\max} = \sqrt{2}\rho_0^{\max}$ でスケールしたもの。

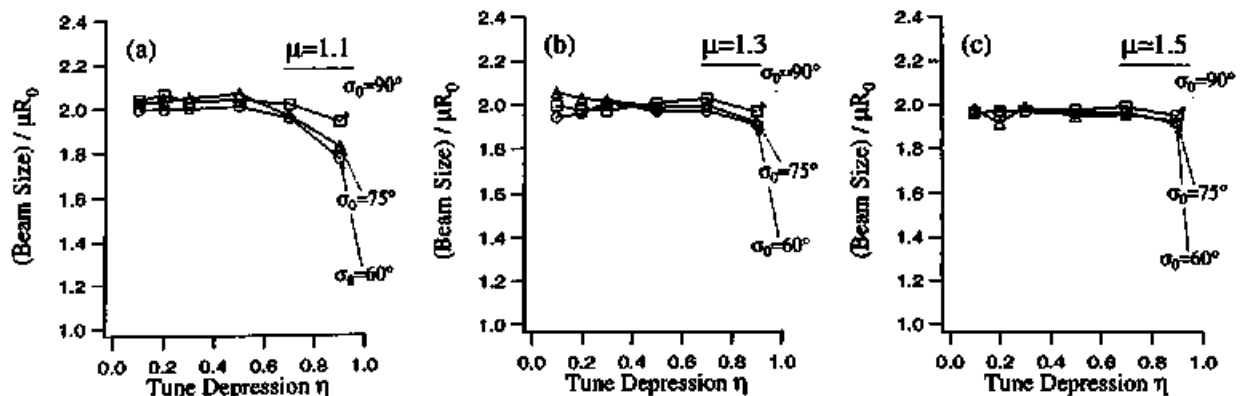


図21. 不整合のあるガウスビームの最大半径のビーム密度に対する依存性。縦軸は、ビームの最大半径を等価なKVビームの半径 $\mu R_0^{\max} = \mu\sqrt{2}\rho_0^{\max}$ でスケールしたもの。

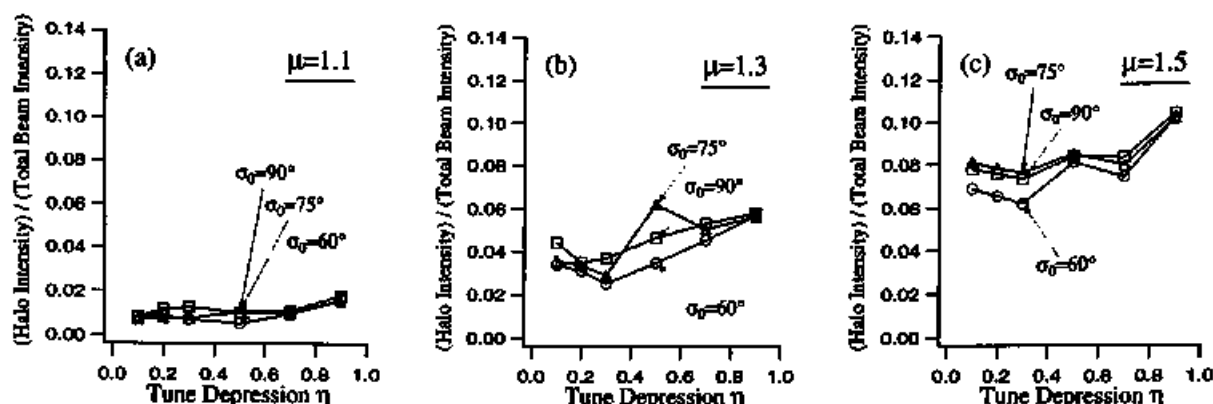


図2 2. 不整合のあるガウスビームのハロー強度のビーム密度に対する依存性。縦軸は、ハロー強度を全ビーム強度でスケールしたもの。ハロー強度は150収束周期輸送したところで評価している。このとき、コアファクターを、ビーム核半径のビーム密度依存性を考慮に入れて、ハローの部分だけを取り出すように調節している。ここで、高密度領域でビーム核のまわりに形成されるビーム雲の部分は、第4. 6節で詳しく述べるように、その大部分が安定で、振幅の大きいハローリングの形成に寄与しないことから、ハローと考えることとした。

表4. 図2 2で採用したコアファクターの値

	$\eta=0.1$	$\eta=0.2$	$\eta=0.3$	$\eta=0.5$	$\eta=0.7$	$\eta=0.9$
$\mu=1.1$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
$\mu=1.3$	1.3~1.4	1.4	1.4	1.4	1.5	1.3~1.4
$\mu=1.5$	1.4	1.4	1.4	1.4~1.5	1.4	1.2

ち、実空間における半径が $r=G\mu\sqrt{2\rho_0^{\max}}$ の円を考え、この円の外側に一度でも出た粒子はハロー粒子とすることとする。このとき、ハロー強度の過大評価を避けるため、ビームが収束系の最初の4分の1を通過してからハロー判別の手続きを始めた。

コアファクターの値を注意深く調節することによって、我々は、位相空間上でのハローの部分だけを取りだし、図2 2に示したようなハロー強度のビーム密度に対する依存性を得た。図2 2で採用したコアファクターの値をまとめたものが表4である¹⁴。表4より、このとき採用したコアファクターの値は、図1 3でガウスビームについて採用した値と同じであることがわかる。この図から、不整合の度合いが大きくなると、ハロー強度が大きくなることは明らかである。さらに、ハロー強度は σ_0 にはほとんど依存せず、ビーム密度に対する依存性も弱いということがわかった。この結果は、第3. 6節で得られた結果と本質的に同じである。なお、第4. 6節で示すように、高密度領域でビーム核の近傍に見られるビーム雲を構成する粒子は安定で、

¹⁴ 表4中で、1.3~1.4と表記してある部分については、 $G=1.3$ を採用して得られたハロー強度と $G=1.4$ を採用して得られたハロー強度の平均をハロー強度とした。1.4~1.5についても同様。

振幅の大きいハローリングの形成に寄与しないことから、図 2 2 では、これらの粒子はハローの一部と考えていない。

第 4. 5 節 構造共鳴

周期的な収束系において、外部収束力の周期性が、共鳴による強い不安定性を引き起こすことはよく知られている[20,21]。この構造共鳴によって引き起こされる rms エンベロープのカオティックな振る舞いは、近年ハロー形成の問題と関連づけられて精力的に研究されてきた[15-19]。構造共鳴不安定性が起こると、不安定になった粒子は容易にビーム核から蹴り出され、大きな振幅のベータatron振動を行い始めるので、この構造共鳴不安定性がハロー形成のメカニズムである可能性を調べることは、言うまでもなく自然なことである。下に述べるように、我々が初期分布として用いたどの 3 つの分布についても、最低次の構造共鳴のストップバンドに捕捉されると、ビームが著しく不安定になることがわかった。

最も危険な共鳴は、空間電荷効果を無視したときの位相の進みが $\sigma_p > 90^\circ$ の領域で起こる 2 次の共鳴である。図 2 3 は、不整合のあるガウスビームのエミッタンス増大率、すなわち最終的なエミッタンスと初期のエミッタンスの比をチューンディプレッション η の関数として表したものである。ここで、空間電荷効果を無視したときの位相の進み σ_0 は 105° に固定されている。この図から、 $\eta=0.6$ から $\eta=0.8$ 付近に大きなストップバンドがあることがよくわかる。高密度領域において、密度が高くなるにしたがって次第にエミッタンス増大率が增加するのが認められるが、これは初期のビーム密度の自発的再構成に関連したもので共鳴による不安定性との関連はない[12,13]。図 2 4 は、 $\sigma_0=105^\circ$ 、 $\eta=0.675$ の整合されたガウスビームの位相空間上での分布を示したものである。この図から、ビームが初期に rms 整合されているにも関わらず、完全に不安定になっていることがわかる。このことは、4. 3 節で述べたハロー形成とは著しい対照をなしている。

この 2 次のストップバンドは、ウォーターバグビームとパラボリックビームについても存在し、不安定

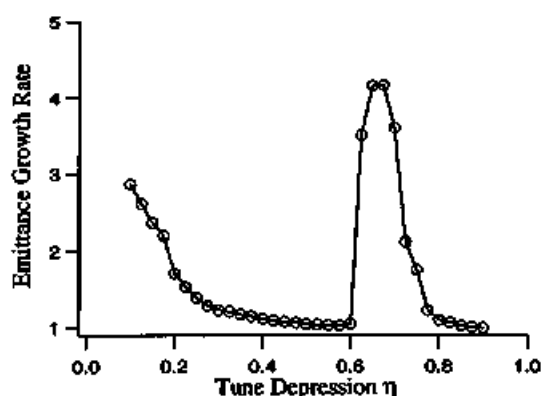


図 2 3. 整合されたガウスビームのエミッタンス増大率のビーム密度に対する依存性。空間電荷効果を無視したときの位相の進みは $\sigma_0=105^\circ$ に固定されている。

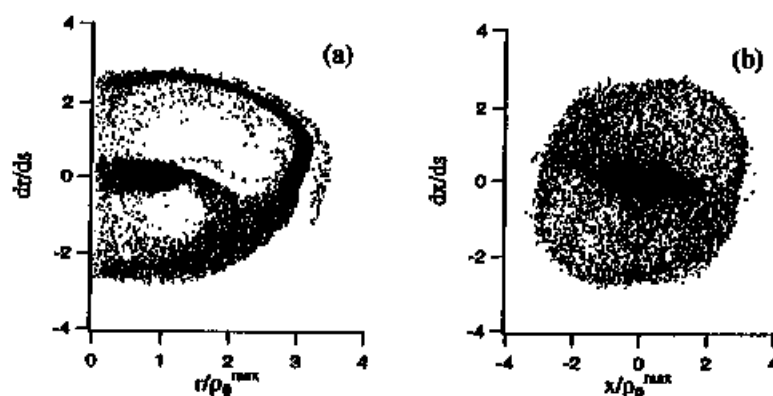


図 2-4. 整合されたガウスビームの位相空間分布。(a)は動径方向の、(b)は水平方向の位相空間における分布を表したものである。空間電荷効果を見捨てたときの位相の進みは $\sigma_0=105^\circ$ に固定されている。 $\eta=0.675$ の条件のもとで得られた、150 収束周期輸送した後の分布。ビームは 2 次の構造共鳴によって不安定になっている。

になる密度領域の位置はほとんど分布に依らないことがわかった。そのバンド幅は分布によって多少異なる¹⁵が、不安定領域はある特定の密度領域に局在していた。したがって、軸対称でないモードが広い範囲にわたって誘起されない限り、ビーム密度を注意深く選択することによって、 σ_0 が 90° より大きい輸送系を設計することも可能であると考えられる。

ウォーターバグビームとパラボリックビームについては、この 2 次のストップバンド以外に、高次のモードに起因する弱い不安定性が見られた。図 2-5 は、例として、 $\sigma_0=75^\circ$ の輸送系を輸送されるウォーターバグビームについて、エミッタンス増大率のチューンディプレッションへの依存性を表わしたものである。この図から、 $\eta=0.44$ 付近に、小さくて狭いピークがあることが見て取れる。このエミッタンスのピークは、図 2-6 に示した位相空間上での分布からわかるように、4 次の共鳴によるものであると考えられる¹⁶。パラボリックビームについても 4 次の共鳴に起因するピークが見られたが、その大きさはウォーターバグビームの場合よりもさらに小さかった。この 4 次の共鳴による不安定性は $\sigma_0>45^\circ$ の領域で起こるはずであるが、このピークは、 σ_0 が 75° より小さくなるにつれて次第に小さくなり、 $\sigma_0<60^\circ$ では確認できなかった。ある特定の次数の共鳴による不安定性は、一般に、ビーム密度が低いときに不安定になった方がエミッタンス増大に対する寄与が小さいという傾向があるためであると思われる¹⁷。

5 次以上の高次のモードによる不安定性については、4 次のモードよりもビームの品質に対する影響がさらに小さいと考えられるため、輸送系を設計する際に、これらの高次のモードに起因する不安定性に対して

¹⁵ 2 次の共鳴による不安定領域のバンド幅は、ガウスビーム場合が最も大きく、ウォーターバグビームの場合が最も小さかった。

¹⁶ 本論文で仮定されているビームのもつ対称性から、3 次の共鳴は起こらないことに注意すること。

¹⁷ ある特定の次数の共鳴による不安定性は、一般に、 σ_0 が小さくなるにつれてビーム密度が低いときに起こる。

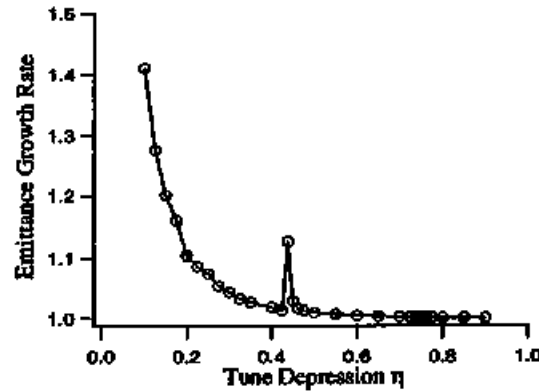


図 2.5. 整合されたウォーターバグビームのエミッタンス増大率のビーム密度に対する依存性。空間電荷効果を無視したときの位相の進みは $\sigma_0=75^\circ$ に固定されている。

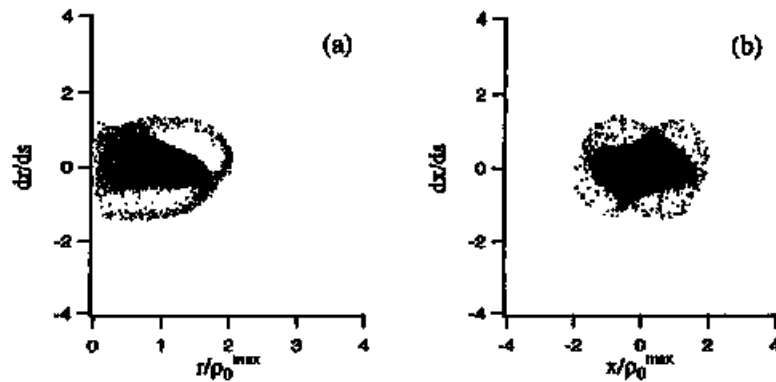


図 2.6. 整合されたウォーターバグビームの位相空間分布。(a)は動径方向の、(b)は水平方向の位相空間における分布を表したもの。空間電荷効果を無視したときの位相の進みは $\sigma_0=75^\circ$ に固定されている。 $\eta=0.4375$ の条件のもとで得られた、150 収束周期輸送した後の分布。ビームは 4 次の構造共鳴によって不安定になっている。

神経質になる必要はないと思われる。

最後に、ガウスビームについては、 $\sigma_0 > 90^\circ$ の領域では大きなストップバンドが見られたのに対して、 $\sigma_0 < 90^\circ$ の領域では構造共鳴による実質的なエミッタンス増大は見られなかった。この結果は、現在までに行われてきた数々の実験結果と一致する[33-36]。このことから、現実のビームが、今回用いた 3 つの分布の中では、比較的ガウスビームに近い性質をもっていると推測することができる。

第 4. 6 節 ハロー除去

第 4. 3 節に示したように、一様な収束系の場合と同様、周期的な収束系においても、ハローの大部分は、初期に位相空間における分布の周辺部に位置している粒子からなることがわかった。このことは、ビーム核

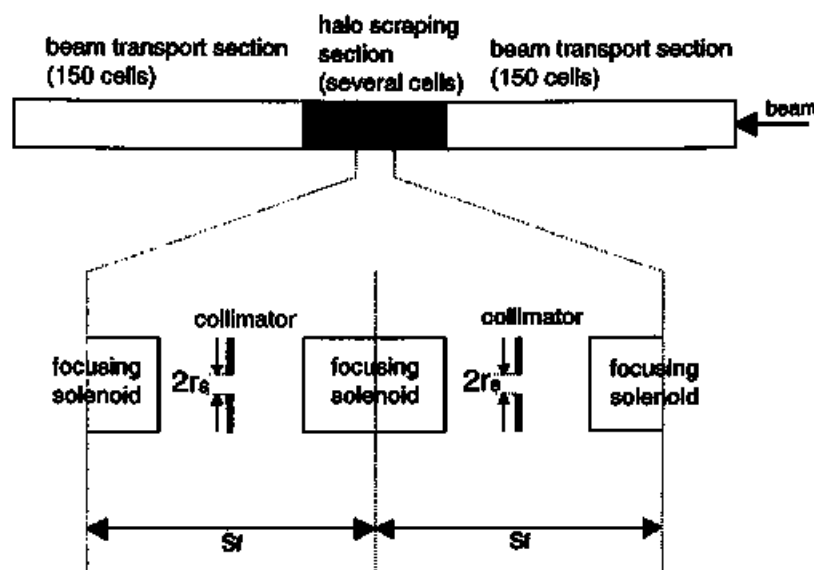


図2.7 マルチコリメーターの概念図。このシステムには、その前後にそれぞれ150周期の周期的な収束系が接続されている。マルチコリメーターの後に接続された収束系は、ハローの再生成の過程を調べるためのものである。

がほぼ安定であることを示しており、ハロー粒子を除去することが可能であることを示唆している。ハロー除去の可能性を調べるために、我々は、図2.7で示したような簡単なハロー除去システムを考えることとする。ここで、簡単のため、コリメーターによって生じる幾何学的な効果による軌跡波および壁面の抵抗による軌跡波は無視することとした。このシステムでは、半径 r_c の穴をもつうすいコリメーターが、周期的な収束系のドリフトスペースの中央に設置されている。したがって、隣り合う2つのコリメーターの間隔は収束系の周期と一致していることになる。我々は、このような構成をもつハロー除去システムを「マルチコリメーター」と呼ぶこととする。

例として、 $\eta=0.3$ 、 $\mu=1.5$ 、 $\alpha_p=60^\circ$ の場合のガウスビームについて見てみよう。図2.8(a)は、150周期輸送された後のこのビームの位相空間上での分布を示したものであり、ビーム核のまわりに大きなハローリングが形成されているのが見て取れる。振幅の大きな粒子を取り除くために、このビームを $r_c=1.3 \times \sqrt{2} \rho_0^{\text{max}}$ で14周期の長さのハロー除去システムに入射した。その結果、このシステムの出口では、図2.8(b)で示したようにハローがうまく取り除かれたビームが得られた。このとき、ビームの強度は最初に比べて9.3%減少した。ハローの再生成が見られないかどうかを確認するため、このコリメートされたビームを、さらに150周期輸送してみた。その結果、最終的に図2.8(c)で示したようなビームが得られた。この図から、ビーム核はまだ不整合をもち、著しい脈動振動をしているに関わらず、ハローの再生成が完全に抑えられていることがよくわかる。さらに、多数のシミュレーションを行った結果、このハロー除去システムがウォーターバグビームとパラボリックビームについても有効であることが確かめられた。

この例では、完全にハローを除去するために14個のコリメーターを用いているが、コリメーター間の間

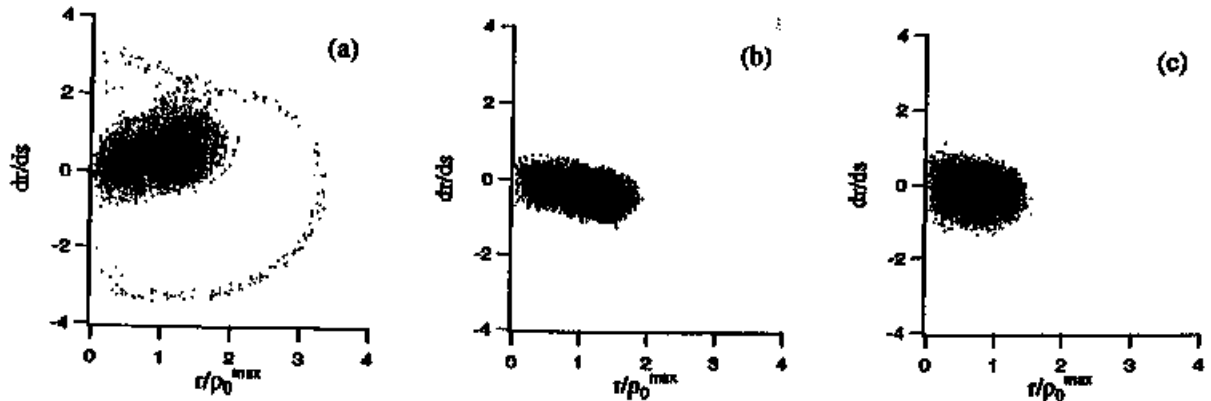


図 28. 不整合のあるガウスビームの動径方向の位相空間分布。空間電荷効果を見捨てたときの位相の進みは $\sigma_\phi=60^\circ$ に固定されている。(a)は、 $\eta=0.3$ 、 $\mu=1.3$ の条件のもとで得られた、150 収束周期輸送した後の分布。(b)は、(a)のビームをコリメーターの径が $r_s=1.3 \times \sqrt{2} \rho_0^{\max}$ で、14 周期のマルチコリメーターに入射し、ハローを除去した後のビームである。(c)は、(b)のビームをさらに 150 収束周期輸送した後の分布である。

隔などを最適化することによって、コリメーターの数を減らすことは可能であると思われる。また、完全にハローの再生成を抑えられなかった場合でも、3～4 個のコリメーターを用いて、かなりハロー強度を弱めることができることが確かめられた[23]。

すでに述べたように、ビーム核とハローの境界を定量的に決定する信頼のおける方法は、いまだ見つかっていない。実際、現実的なビームのビーム核とハローの境界を解析的に決定することは、ほとんど不可能である。そこで、第 3. 6 節および第 4. 4 節において、我々はハローを形成しているおおよその粒子数を評価するために、その値の選び方に多少の任意性はあるものの、コアファクターというものを導入した。一方、

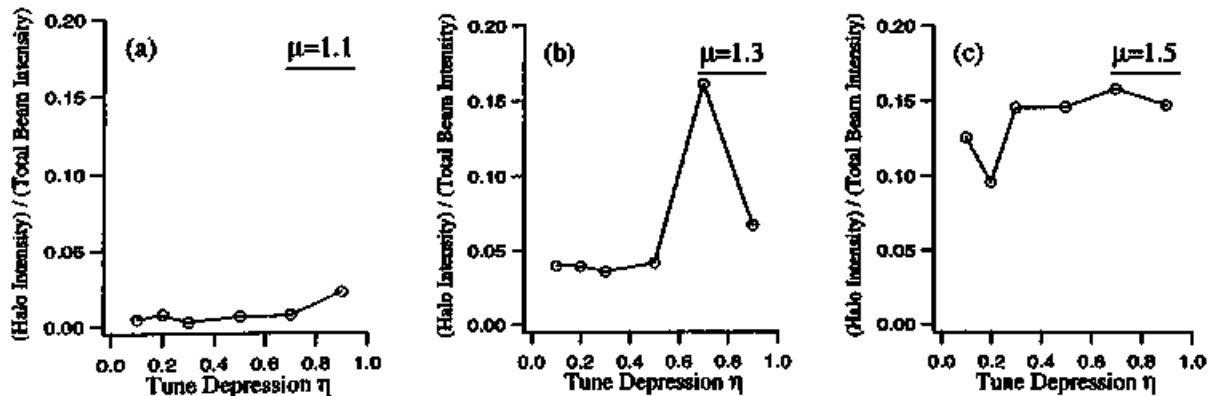


図 29 不整合のあるガウスビームのハロー強度のビーム密度に対する依存性。空間電荷効果を見捨てたときの位相の進みは $\sigma_\phi=60^\circ$ に固定されている。縦軸は、ハロー強度を全ビーム強度でスケールしたもの。ハロー強度は 150 収束周期輸送したところで評価している。このとき、再生成するハローの強度が、もとの全ビーム強度の 0.1% 以下にするために、マルチコリメーターで除去しなければならない粒子をハロー粒子とした。ここで採用したハローの定義は、図 2.2 における定義と異なることに注意してほしい。

図 2 8 に示された結果は、もっと信頼のおけるハロー強度の評価方法がありうることを示唆している。すなわち、不整合に対して安定でハローの再生成を引き起こさない領域が存在するとすれば、その領域をビーム核と考え、それ以外の部分をハローと考えるのである。我々は、この考えに基づき、ハローの再生成を抑えるためにどれだけの粒子をマルチコリメーターで取り除く必要があるかを調べることで、ハローの強度を評価してみた。その結果を示したのが図 2 9 である。ここで、我々は $\sigma_0=60^\circ$ の輸送系を輸送されるガウスビームを考えている。この図では、再生成するハローの強度をもとの全ビーム強度の 0.1% 以下に抑えるためにマルチコリメーターで取り除かれた粒子数の全粒子数に対する比を縦軸にとっている。その結果得られたハロー強度は、図 2 2 に比べてやや大きい、 $\mu=1.3$ 、 $\eta=0.7$ の場合に原因のよくわからないピークが見られることを除けば、やはり図 2 2 と同様、ビーム密度に対する依存性は顕著でないことがわかった。さらに、不整合の大きい場合の方がよりハロー強度が大きいことも確かめられた。特に、 $\mu=1.5$ の場合には、ハロー強度が全ビーム強度の 10% を上回っていることは注目に値する。

また、チューンディプレッションが 0.3 を下回るような高密度領域であっても、ハローの再生成を比較的容易に完全に抑えられることがわかったことは特筆に値する。そのような高密度領域では、ビーム密度の自発的再構成によるビーム核の一様化が顕著であるため、ビーム核の境界を決定するのが容易である。すでに述べたように、高密度ビームのビーム核は、そのまわりに低密度のビーム雲をもっているが、このビーム雲を構成する粒子のほとんどはビーム核の近傍にとどまり、その部分を除去しなくてもハロー再生成の原因とならないため、ビーム核の一部とみなすことができることがわかった。ハローの再生成を完全に抑えるために取り除かなければならない粒子数は、 $\eta<0.3$ の場合は、図 2 9 に示した値に比べて 30~80% 多くなる。一方、チューンディプレッションが 0.9 を上回るような低密度領域では、コリメーターの径や数に関わらずハローの再生成はほとんど見られず、ハローは再生成を抑えながら簡単に取り除くことができることがわかった。

第 5 章 まとめ

自己充足的な粒子シミュレーションによって、一様な収束系および周期的な収束系を輸送される軸対称なビームにおけるハロー形成の基礎的な性質について研究を行った。周期的な収束系を輸送されるビームについては、ビーム密度がある特定の領域にはいると、収束系のもつ周期性が共鳴による不安定性を引き起こすことが確かめられた。とくに、 $\sigma_0>90^\circ$ の収束系においては、2 次の共鳴によるかなり大きなストップバンドが存在することがわかった。ガウス分布については、2 次以外の共鳴によるストップバンドは見られなかったが、ウォーターバグビームとバラボリックビームについては、高次の共鳴による不安定領域が見られた。これらの高次の共鳴による不安定領域のバンド幅はかなり狭く、さらに、ビームの品質に対する影響もそれほど大きくないことがわかった。これらのストップバンドが特定の密度領域に局在していることを考えると、 90° より大きい σ_0 をもった輸送系を設計することは、非現実的なことではないと思われる。

この構造共鳴による不安定領域に入らない限り、位相空間上での分布の様子やハローの最大半径、ハロー強度などビームハローの基本的性質について、周期的な収束系についても一様な収束系の場合と著しく類似した結果が得られた。この著しい類似性は、周期的な収束系におけるハロー形成のメカニズムが、一様な収

束系の場合と本質的に同じであることを強く示唆している。このことは、収束系のもつ周期性がハロー形成過程において本質的な役割を果たしていないことを意味し、エンベロープ方程式に基づくハロー形成過程の研究がどの程度現実的な意味をもちうるのかについて疑問の余地があることを意味している。

今回行われたシミュレーションによって、一様な収束系を輸送されるビーム、周期的な収束系を輸送されるビームいずれについても、位相空間上で定義されたビーム核は、その密度や不整合の大きさに関わらず、ほぼ安定であることがわかった。すなわち、ハローの大部分はビーム核の境界の外側をまわる粒子によって構成されており、これらの粒子が位相空間で定義されたビーム核内に入っていくことや、逆に、ビーム核内の粒子がハローになることはない。このことは、「ビーム核を構成する粒子の一部がどのようなメカニズムでビーム核から飛び出してハローになるか」ということを考えなくてもよいことを意味し、粒子-核モデルが、ハローの特性を調べるのに有効であることを示唆している。

また、初期の r_{ms} ビーム半径でスケールされたハローの最大半径が、ビーム密度に依存せず、常にほぼ $2\sqrt{2}$ となることがわかった¹⁸。このことから、大強度線形加速器の最小のアーチャー半径は、少なくとも、整合されたKVビームの半径 $\sqrt{2}\rho_0$ の $2\mu_{max}$ 倍は必要であると考えられる。ここで、 μ_{max} は起こりうる予想される最大の不整合の大きさである。

コファクターの値を注意深く調節することによって、我々は、図13と図22に示したようなハロー強度のビーム密度に対する依存性を得た。この図から、不整合の度合いが大きくなると、ハロー強度が大きくなること、およびハロー強度はビーム密度にほとんど依存しないということがわかった。図13から、 μ が1に近い場合を除き、最も大きい非線形な空間電場のエネルギーをもつガウスビームにおいてハロー強度が最大になり、最も小さい非線形な空間電場のエネルギーをもつウォーターバグビームにおいてハロー強度が最小になることがわかる。このような傾向があることは、周期的な収束系についても確かめられた。このことから、線形な収束系を輸送される軸対称なビームに関する限り、ビームの分布の定常分布からのずれがハロー形成の主たる原因であると考えられる。ビームは、定常状態にないときには、非線形な空間電場のエネルギーを最小にすることによって、その定常状態に近づこうとし、この過程で、ビームが余分にもっている空間電場のエネルギーによってビーム核にプラズマ振動が誘起される。このとき、位相空間において周辺部に位置する粒子、すなわち比較的大振幅のベータトロン振動を行う粒子の一部が、粒子-核共鳴によってとらえられ、ハローとなると考えられる。言い換えれば、厳密に整合のとれた状態でビームが収束系に入射されれば、その定常分布自体が本質的に不安定でない限り、ハローが成長する理由はない。ハロー形成の原因として、いくつかの要因が考えられてきたが、重要なのは、ビームがその定常状態からどれほどずれているかであると思われる。

最後に、比較的簡単な構造のハロー除去システムであるマルチコリメーターの有用性を確かめるため、多数のシミュレーションを行い、ハローの再生成を抑えながらハローを除去できる可能性があることが確かめられた。しかし、ここで行われたシミュレーションでは、ビームによってコリメーターの壁面に誘起される

¹⁸ ビームが構造共鳴によって不安定になると、その結果生じるハローの最大半径は、共鳴が起こらないときに比べてやや大きくなる。例えば、 $\sigma_0=105^\circ$ のときには、初期の r_{ms} ビーム半径でスケールされたハローの最大半径は、 $2\sqrt{2}$ ではなくほぼ $2.3\sqrt{2}$ となる。

鏡像電荷の効果を見逃していることを心に留めておくべきである。我々の興味のある状況では、ビーム密度が非常に大きいため、ビームの航跡波がビーム核の安定性に重大な影響を及ぼす可能性がある。したがって、このようなハロー除去システムの実現可能性は、いかにこの鏡像効果を小さくできるかにかかっていると考えられる。さらに、アーノルド拡散 (Arnold diffusion) [29] や結合効果のような多次元の影響がビームハロー形成に与える影響についても、今後、2D または 3D のコードを用いて注意深く検証する必要がある。

謝 辞

この研究が成ったのは、岡本宏巳助手の思慮深く忍耐強い指導のおかげである。また、岩下芳久助手には、計算機を利用するに当たって有益な助言と指導をしていただいた。野田章教授と井上信教授には、絶え間ない励ましと支援をしていただいたことに感謝する。また、野田章教授、井上信教授、岡本宏巳助手は、この論文の原稿すべてに目を通し、貴重な意見と批評をしてくださった。この論文中のいくつかの重要な点について、高エネルギー加速器研究機構の平田光司博士、生出宣勝博士と有益な議論を交わすことができ、また、貴重な助言をしていただいたことに深く感謝する。最後に、折々に有益な助言や批評をしていただいたことに対して、化学研究所原子核科学研究施設の加速器グループの他のすべてのメンバーに謝意を表したい。

Appendix-A エンベロープ方程式

ここで、Sacherer[14]の方法に基づいて、エンベロープ方程式を導いておく。線形な収束系を輸送されるビームの時間発展は、次のようなハミルトニアンによって支配される：

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} \kappa_x(s)^2 x^2 + \frac{1}{2} \kappa_y(s)^2 y^2 + \frac{q}{mu^2} V_w(x, y, s) \quad (\text{A-1})$$

ここで $\kappa_x(s)$ と $\kappa_y(s)$ は、それぞれ水平方向と鉛直方向の収束力の強さの空間的な変化を表す関数である。この式から、各粒子のしたがう運動方程式は、次のように表すことができる：

$$\frac{dx}{ds} = p_x \quad (\text{A-2a})$$

$$\frac{dp_x}{ds} = -\kappa_x(s)^2 x - \frac{q}{mu^2} E_x \quad (\text{A-2b})$$

ここで、 E_x は空間電場の水平方向の成分であり、空間電荷ポテンシャルと次のような関係がある：

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} V_w(x, y, s) \quad (\text{A-3})$$

また、これと同様の方程式が鉛直方向についても成り立つ。

ある位相空間分布 $f(x, p_x, y, p_y)$ について、式(A-2)の平均をとると、次のような式を得ることができる：

$$\left\langle \frac{dx}{ds} \right\rangle = \langle p_x \rangle \quad (\text{A-4a})$$

$$\left\langle \frac{dp_x}{ds} \right\rangle = -\kappa_x(s)^2 \langle x \rangle - \frac{q}{mu^2} \langle E_x \rangle \quad (\text{A-4b})$$

したがって、位相空間分布 $f(x, p_x, y, p_y)$ をもつビームの2次のモーメントは、

$$\frac{d}{ds} \langle x^2 \rangle = 2 \left\langle x \frac{dx}{ds} \right\rangle = 2 \langle xp_x \rangle \quad (\text{A-5a})$$

$$\frac{d}{ds} \langle xp_x \rangle = \left\langle \frac{dx}{ds} p_x \right\rangle + \left\langle x \frac{dp_x}{ds} \right\rangle = \langle p_x^2 \rangle - \kappa_x(s)^2 \langle x^2 \rangle - \frac{q}{mu^2} \langle xE_x \rangle \quad (\text{A-5b})$$

$$\frac{d}{ds} \langle p_x^2 \rangle = 2 \left\langle p_x \frac{dp_x}{ds} \right\rangle = -2\kappa_x(s)^2 \langle xp_x \rangle - \frac{2q}{mu^2} \langle p_x E_x \rangle \quad (\text{A-5c})$$

のような式を満たすことがわかる。ここで、 $\langle xE_x \rangle$ と $\langle p_x E_x \rangle$ は、一般にさらに高次のモーメントと関係づけられる。このように、ある次数のモーメント方程式がより高次のモーメントと関係づけられ、これらが無限次元の階層方程式系をなすことは、モーメント方程式が一般にもつ特性である。しかし、空間電場が自由空間のポアソン方程式を満たし、かつビームの実空間分布が楕円対称性をもつときには、 $\langle xE_x \rangle$ は2次のモーメントだけに依存することが知られている。すなわち、

$$\langle xE_x \rangle = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 u} \frac{a}{a+b} \quad (\text{A-6})$$

残るもう1つの項である $\langle p_x E_x \rangle$ は、次のようにエミッタンス増大と関係づけられる：

$$\frac{d\epsilon_x^2}{ds} = \frac{32q}{m(\beta c)^2} \left(\langle xp_x \rangle \langle xE_x \rangle - \langle x^2 \rangle \langle p_x E_x \rangle \right) \quad (\text{A-7})$$

ここで、rms エミッタンスは2次のモーメントを用いて、 $\epsilon_x = 4\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle xp_x \rangle^2}$ のように定義されている。

式(A-5a)、(A-5b)とrms エミッタンスの定義を組み合わせると、次のような式を導くことができる：

$$\frac{d^2 a}{ds^2} = -\kappa_s(s)^2 a - \frac{K}{2(a+b)} + \frac{\varepsilon_s}{16a^3} \quad (\text{A-8})$$

このようにして得られた式(A-8)は、rms ビーム半径の時間発展を記述する常微分方程式であり、これをエンベロープ方程式と呼ぶ¹⁹。

式(A-8)に含まれるrms エミッタンスの時間発展は、式(A-7)で示したように、さらに高次のモーメントに依存するため、この式を厳密に解くことは一般に不可能である。エンベロープ方程式を用いるときには、ふつう、エミッタンスが一定であると仮定するか、あるいはエミッタンスの時間発展は先験的にわかっていると仮定する。

軸対称なビームについては、 $E_x = E_y = E_r/\sqrt{2}$ のような関係式が成り立つため、式(A-6)は、

$$\langle rE_r \rangle = \frac{I}{4\pi\epsilon_0\mu} \quad (\text{A-9})$$

のような簡単な形になる。一方、空間電場の動径方向の成分である E_r は、ガウスの法則より

$$E_r = \frac{I}{2\pi\epsilon_0\mu} \frac{\xi(r,s)}{r} \quad (\text{A-10})$$

と求められる。この式と式(A-9)を比較することにより、 $\langle \xi \rangle = 1/2$ という関係式が導き出せる。

Appendix-B 粒子シミュレーションにおける運動方程式の積分

今回開発した粒子シミュレーションコードでは、各粒子の運動の時間発展を追跡するために、その運動方程式をシンプレクティック積分アルゴリズムを用いて積分している。シンプレクティック積分アルゴリズムは、ハミルトン系の時間発展を追跡するために特別に開発された数値解法である。ハミルトン方程式の解の厳密な時間発展はシンプレクティック変換となっており、この性質を厳密に保存する数値解法がシンプレクティック数値解法である。すなわち、このシンプレクティック積分アルゴリズムでは、汎用の数値解法であるオイラー（Euler）法やルンゲクッタ（Runge-Kutta）法と異なり、そのハミルトン系が本来もつ不変量をできうる限り一定に保ちながら、運動方程式の積分が行われる。そのため、誤差が単調に蓄積することがなく、得られる数値解は厳密解のまわりで行きつ戻りつを繰り返す。このシンプレクティック解法は、そのコスト

¹⁹ この方程式が、ビームの実空間分布が楕円対称である限り、分布の形に依存せず成り立つことから、「等価なビーム」という概念を生む基礎となった。すなわち、異なる分布関数をもつビームを比較するとき、その2つのビームが同じ2次のモーメントをもてばそのrms ビーム半径の時間発展が同じになることから、同じ2次のモーメントをもつビームをお互いに等価であるとするのである。

パフォーマンスの高さから、近年、ハミルトン系の時間発展を精度よく追跡するためには不可欠の手法となりつつある。この Appendix では、このシンプレクティック数値解法を用いた、一様な収束系を輸送されるビームの運動方程式の積分のアルゴリズムについて述べることにする。この Appendix の内容は、容易に周期的な収束系の場合に拡張することができる。

各粒子の従う運動方程式を積分するためには、まず最初に、関数 $\xi(r,s)$ の形を求める必要がある。今回、我々の開発した粒子シミュレーションコードでは、 $\xi(r,s)$ の形を決定するため、まず、各シミュレーション粒子の電荷を、それぞれ最も近い動径メッシュポイントに割り当てる。 j 番目のメッシュポイントの位置は、 Δr をメッシュサイズとして、 $r_j = (j+1/2)\Delta r$ である。したがって、各メッシュポイントに割り当てられる電荷は、次のように求められる：

$$Q_j = \sum_{(j-1)\Delta r \leq r_l < j\Delta r} q_m \quad (\text{B-1})$$

ここで、 q_m は各シミュレーション粒子に与えられた電荷であり、シミュレーション粒子の数を N_m とすると、 $N_m q_m = Nq$ のような関係式を満たす。式(B-1)では、粒子の動径座標 r_l が $(j-1)\Delta r \leq r_l < j\Delta r$ を満たす粒子についてのみ和をとっている。よって、 j 番目のメッシュポイントの位置における関数 $\xi(r,s)$ の値は、次のように近似的に求められる：

$$\xi_j(s) = \frac{1}{Nq} \sum_{i \in j} Q_i \quad (\text{B-2})$$

任意の位置における関数 $\xi(r,s)$ の値は、最も近い2つのメッシュポイントにおける値から線形な補間を行うことによって、次のように求められる：

$$\xi(r,s) = \frac{r_{j+1} - r}{\Delta r} \xi_j(s) + \frac{r - r_j}{\Delta r} \xi_{j+1}(s) \quad (\text{B-3})$$

この関数 $\xi(r,s)$ は、各積分ステップごとに求められる。

上のような手順に従って、関数 $\xi(r,s)$ の関数形が決定できれば、各積分ステップ Δs の間に $\xi(r,s)$ の関数形が変わらないと仮定して、各粒子の時間発展が追跡できる。このとき、2次のシンプレクティック積分アルゴリズムを用いて式(3-3)の数値積分を行っている。すなわち、

$$r_i\left(s_n + \frac{\Delta s}{2}\right) = r_i(s_n) + p_{ri}(s_n) \cdot \frac{\Delta s}{2} \quad (\text{B-4a})$$

$$p_{ri}\left(s_n + \Delta s\right) = p_{ri}(s_n) - \kappa_0^2 r_i\left(s_n + \frac{\Delta s}{2}\right) \cdot \Delta s + \frac{\tilde{K}_\xi\left(r_i\left(s_n + \frac{\Delta s}{2}\right), s_n\right)}{r_i\left(s_n + \frac{\Delta s}{2}\right)} \cdot \Delta s \quad (\text{B-4b})$$

$$r_i(s_n + \Delta s) = r_i\left(s_n + \frac{\Delta s}{2}\right) + p_{ri}(s_n + \Delta s) \cdot \frac{\Delta s}{2} \quad (\text{B-4c})$$

シンプレクティック積分アルゴリズムは、ハミルトニアンを可能な限り保存するアルゴリズムであるが、より数値積分の精度を高めるため、我々はさらにステップサイズ可変アルゴリズムを採用した。関数 $\xi(r; s)$ は各積分ステップで変化しないと仮定しているので、各粒子のもっているビーム軸に垂直な方向の運動エネルギーは、各積分ステップで保存されるはずである。すなわち、次のような関係式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(p_r(s_n + \Delta s)^2 + \frac{p_\theta^2}{r(s_n + \Delta s)^2} \right) + \frac{1}{2} \kappa_0^2 r(s_n + \Delta s)^2 - \tilde{K} \int_0^1 \frac{\xi(r(s_n + \Delta s); s_n)}{r(s_n + \Delta s)} dr \\ &= \frac{1}{2} \left(p_r(s_n)^2 + \frac{p_\theta^2}{r(s_n)^2} \right) + \frac{1}{2} \kappa_0^2 r(s_n)^2 - \tilde{K} \int_0^1 \frac{\xi(r(s_n); s_n)}{r(s_n)} dr \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

この式が要求される精度の範囲内で成り立たないときには、積分ステップをさらに細かく区切って計算を行った。

Appendix-C 初期分布の生成

残留ガスによるビームの散乱やビームを構成する粒子間での散乱などの衝突効果を無視すれば、ビームの力学的挙動は次のようなブラソフ方程式で記述できることが知られている：

$$\frac{\partial f}{\partial s} + p_x \frac{\partial f}{\partial x} + p_y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial p_y} = 0 \quad (\text{C-1})$$

ここで、 f は位相空間におけるビームの分布関数であり、ポテンシャル V は、外部収束力が線形の場合、次のように表すことができる：

$$V = \frac{1}{2} \kappa_x(s)^2 x^2 + \frac{1}{2} \kappa_y(s)^2 y^2 + \frac{q}{mu^2} V_{sc}(x, y; s) \quad (\text{C-2})$$

空間電荷ポテンシャル V_{sc} は、自由空間では、次のようなポアソン方程式から求められる：

$$\frac{\partial^2 V_{sc}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{sc}}{\partial y^2} = \frac{q}{\epsilon} \iint f dp_x dp_y \quad (\text{C-3})$$

したがって、式(C-1)～(C-3)を連立して解けば、このブラソフーポアソン方程式系の定常分布を得ることができる。

外部収束力が一様な場合は、分布関数 f がハミルトニアン H の関数であればその関数形に関わらずブラソフ方程式の定常解となることが知られている。したがって、分布関数 $f(H)$ の関数形を仮定し、ポアソン方程式を解いて、対応する空間電荷ポテンシャルを求めれば、ブラソフーポアソン方程式系の定常解を得ることができる²⁰。このとき、分布関数の関数形の選び方は任意であるので、無限の種類の定常解が存在することになる。しかし、このような手順でポアソン方程式を解析的に解いて定常分布を求めることは一般に容易ではない。

一方、外部収束力が周期的に変動する場合は、ハミルトニアンが運動の定数でなくなるため、ハミルトニアン H の関数は一般にブラソフ方程式の定常解ではあり得ない。周期的な収束系については、ブラソフーポアソン方程式系を解く一般的な方法は未だ見つかっておらず、KV分布だけが唯一解析的な形がわかっている定常解である。KV分布は、その線形性によって解析が著しく簡単になるため、解析的なアプローチの基礎としてしばしば用いられてきたが、その特異性から現実的なビームとかなり異なる性質を示す可能性があるため、粒子シミュレーションの初期分布として用いるには適さないと考えられる。

このように、ブラソフーポアソン方程式系の現実的な定常解をつくるのが難しいことから、粒子シミュレーションでは、ふつう、空間電荷ポテンシャルが線形であると仮定した線形ハミルトニアンで定義された初期分布が用いられる。この線形ハミルトニアンは、一様な収束系を輸送されるビームについては、次のように表すことができる：

$$H_0 = \frac{1}{2}(\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2) + \frac{1}{2}\eta^2(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \quad (C-4)$$

ここで、 $\tilde{x} = \sqrt{\kappa_0/\epsilon}x$ 、 $\tilde{y} = \sqrt{\kappa_0/\epsilon}y$ 、 $\tilde{p}_x = p_x/\sqrt{\kappa_0\epsilon}$ 、 $\tilde{p}_y = p_y/\sqrt{\kappa_0\epsilon}$ は第3章で導入されたものと同様にスケールされた座標である。これ以降、Appendix C では一様な収束系を輸送されるビームの初期分布を生成する方法について述べるものとし、簡単のためチルダ(～)は省略するものとする。このAppendixの内容は、適当にスケールされた座標を用い、式(C-4)中の η を数値的に求めた初期位置における x 方向の広がり σ_x と p_x 方向の広がり σ_{p_x} の比に置き換えれば、周期的な収束系の場合に容易に拡張することができる。

もちろん、 H_0 の関数として定義された分布は、KV分布を除き、ブラソフーポアソン方程式系の定常解ではないことから、その時間発展は、エミッタンス増大やビーム密度の自発的再構成などの過渡現象を伴うものとなる²¹。これらの過渡現象の結果、ビームは、一様に近い実空間分布をもつブラソフーポアソン方程式系の定常解に近づいていくと考えられている。線形ハミルトニアンで定義された初期分布を用いる限り、輸送系に対して完全に整合させることは不可能なので、我々はrms整合、すなわち、そのビームのrmsビーム半径を整合されたビームのrmsビーム半径と一致させる方法を用いる。ここで、整合されたビームの

²⁰ 第2.2節で用いた定常ウォーターバグ分布は、このようにして求められた定常分布の一つである。

²¹ KV分布の場合は、各粒子に働く空間電荷力が、ビーム軸からの距離に比例するため、線形ハミルトニアンが厳密なハミルトニアンと一致する。

rms ビーム半径は、エンベロープ方程式より式(2.6)のように簡単に求めることができる。

まず、rms 整合されたビームを考えよう。粒子のもつ線形ハミルトニアンが決まれば、その粒子の位相空間 (x, p_x, y, p_y) における座標は次のようにして決定できる：

$$x = \frac{\sqrt{2H_0}}{\eta} \sin \Psi \sin \varphi \quad (\text{C-5a})$$

$$p_x = \sqrt{2H_0} \sin \Psi \cos \varphi \quad (\text{C-5b})$$

$$y = \frac{\sqrt{2H_0}}{\eta} \cos \Psi \sin \theta \quad (\text{C-5c})$$

$$p_y = \sqrt{2H_0} \cos \Psi \cos \theta \quad (\text{C-5d})$$

ここで、 Ψ は 0 から $\pi/2$ までの一様乱数、 φ と θ はそれぞれ 0 から 2π までの一様乱数である。不整合のあるビームは、整合されたビームを生成した後、各粒子の x および y に μ をかけ、 p_x と p_y を μ で割ることによって得られる。

いったん位相空間 (x, p_x, y, p_y) で初期分布を生成すれば、極座標系への変換は、次のように簡単に行うことができる：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{C-6a})$$

$$p_r = \frac{xp_x + yp_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{C-6b})$$

$$p_\theta = xp_y - yp_x \quad (\text{C-6c})$$

以下に、KV 分布と粒子シミュレーションで用いた 3 種類の分布の生成方法について述べる。どの分布についても、シミュレーション粒子数が 10^4 のとき、0.5% 以下の精度で所定のエミッタンスのビームを生成できることが確かめられた。

C. 1 KV 分布

KV 分布の分布関数は、線形ハミルトニアンを用いて、次のように定義されている：

$$f_{KV}(H_0) = \frac{N}{2\pi R_0^2} \delta(H_0 - E_{KV}) \quad (\text{C-7})$$

ここで、 E_{KV} は定数で、KV ビームの半径 R_0 との間に $R_0 = \sqrt{2} \rho_0 = \sqrt{2E_{KV}}/\eta$ のような関係式が成り立つ。KV

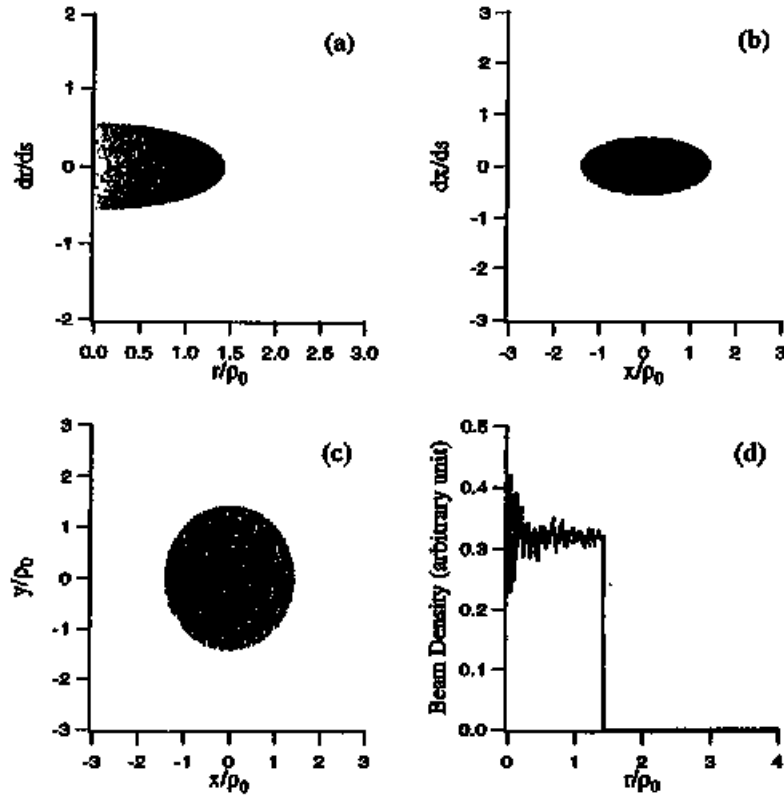


図 3.0. 生成したKVビームの例。(a)は動径方向の位相空間分布。(b)は水平方向の位相空間分布。(c)は直交座標形における実空間分布。(d)は実空間における密度分布。

分布の実空間分布は式(C-7)より、次のように求められる：

$$n_{kv}(r) = \frac{N}{2\pi R_0^2} [1 - \text{sgn}(r - R_0)] \quad (\text{C-8})$$

η の値を決めれば、 ρ_0 と E_{kv} の値も決まるため、各粒子の座標は式(C-5)と(C-6)を用いて簡単に決定することができる。図 3.0 に、生成したKVビームの例を示す。

C. 2 ガウス分布

ガウス分布の分布関数は、線形ハミルトニアンを用いて、次のように定義されている：

$$f_{ga}(H_0) = \frac{N\eta^2}{4\pi^2\sigma^4} \exp\left(-\frac{H_0}{\sigma^2}\right) \quad (\text{C-9})$$

ここで、 σ は ηx , ηy , p_x , p_y の標準偏差であり、 ρ_0 との間に $\sigma = \eta\rho_0/\sqrt{2}$ のような関係式が成り立つ。ガウス分布の実空間分布は式(C-9)より、次のように求められる：

$$n_{GA}(r) = \frac{N\mu^2}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\mu^2 r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (C-10)$$

ガウスビームを生成するためには、式(C-9)のような確率分布をもつ乱数を生成する必要がある。一様な乱数を式(A-5)のような確率分布をもつ乱数に変換する変換則は、次のように与えられる：

$$1-\Lambda = \left(1 + \frac{\Gamma_{GA}}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\Gamma_{GA}}{\sigma^2}\right) \quad (C-11)$$

ここで、 Λ は0から1までの一様乱数である。この一様乱数は、式(C-11)を数値的に解くことによって、式(C-9)のような確率分布をもつ乱数 Γ_{GA} に変換される。このような乱数が生成されれば、各粒子の座標は式(C-5)と(C-6)を用いて簡単に決定することができる。

また、 Λ を0から $1 - (1 - n^2/2)\exp(-n^2/2)$ までの一様乱数に置き換えれば、 $n\sigma$ のところでテールの部分を切

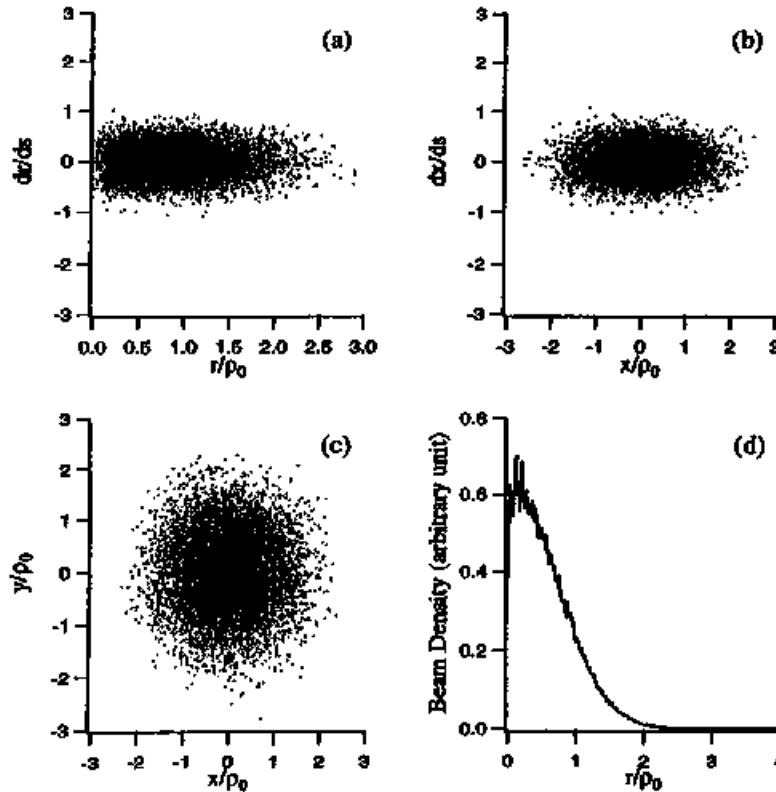


図 3.1. 生成したガウスビームの例。テールの部分を切っていない場合。(a)は動径方向の位相空間分布。(b)は水平方向の位相空間分布。(c)は直交座標形における実空間分布。(d)は実空間における密度分布。

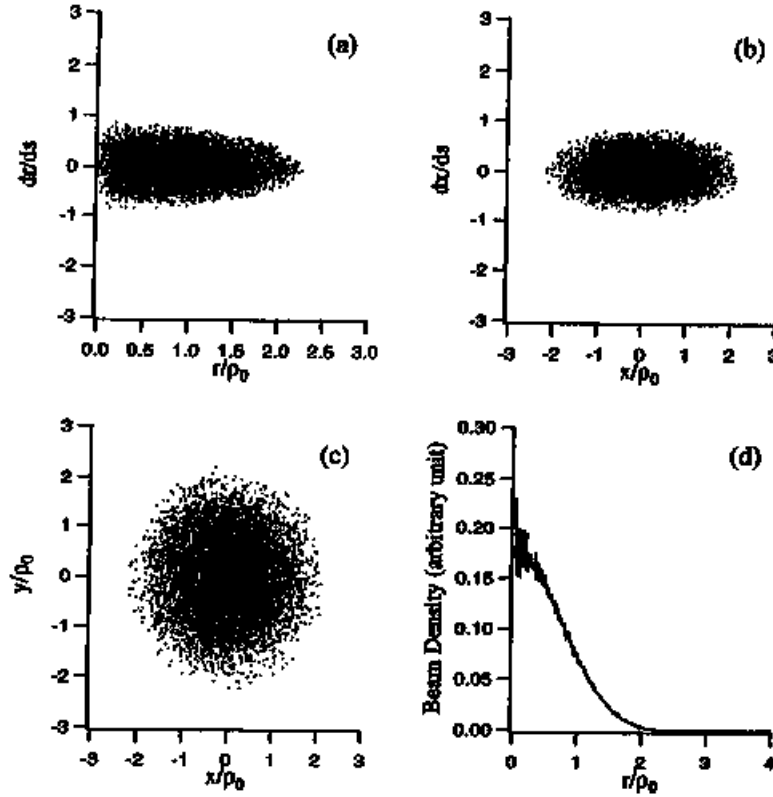


図 3.2. 生成したガウスビームの例。テールの部分を標準偏差の 3 倍のところまで切った場合。(a)は動径方向の位相空間分布。(b)は水平方向の位相空間分布。(c)は直交座標形における実空間分布。(d)は実空間における密度分布。

ったガウス分布を生成することができる。ただし、このときには、所定の rms 量をもったビームを生成するため、生成された各粒子の座標に、適当な定数をかけておく必要がある。図 3.1 と図 3.2 に、生成したガウスビームの例を示す。図 3.1 は、テールの部分を切らなかった場合、図 3.2 は、テールの部分を標準偏差の 3 倍のところまで切った場合である。

C. 3 ウォーターバッグ分布

ウォーターバッグ分布の分布関数は、線形ハミルトニアンを用いて、次のように定義されている：

$$f_{WB}(H_0) = \frac{2N}{\pi^2 \eta^2 R_{WB}^4} \quad (H_0 \leq E_{WB}) \quad (C-12)$$

ここで、 E_0 は定数で、ウォーターバッグビームの半径 R_{WB} との間に $R_{WB} = \sqrt{3}\rho_0 = \sqrt{2E_{WB}}/\eta$ のような関係式が成り立つ。ウォーターバッグ分布の実空間分布は式(C-12)より、次のように求められる：

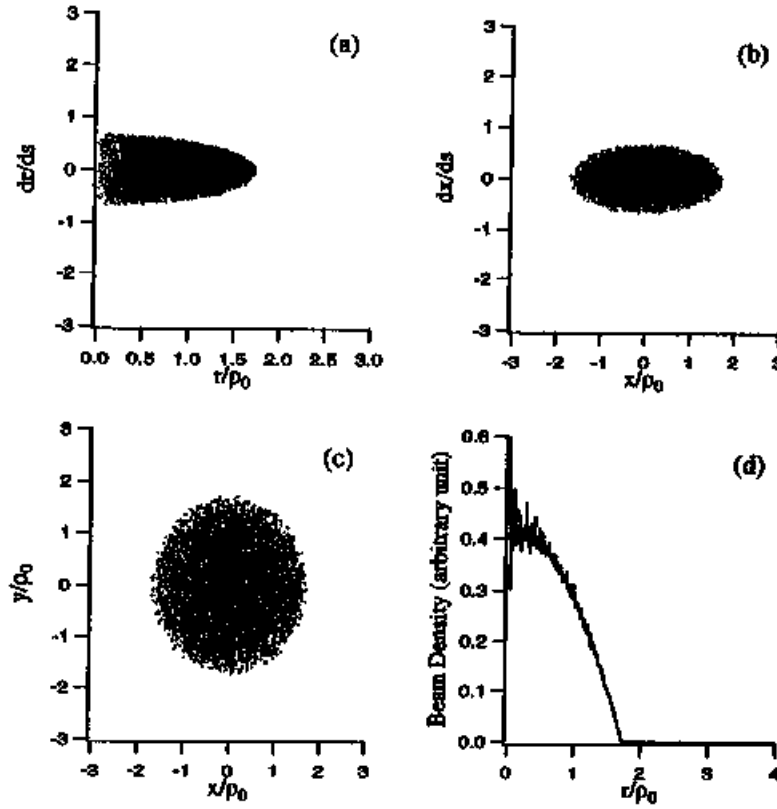


図 3.3. 生成したウォーターバッグビームの例。(a)は動径方向の位相空間分布。(b)は水平方向の位相空間分布。(c)は直交座標形における実空間分布。(d)は実空間における密度分布。

$$n_{wb}(r) = \frac{2N}{\pi R_{wb}^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R_{wb}} \right)^2 \right] \quad (C-13)$$

ウォーターバッグビームを生成するためには、式(C-12)のような確率分布をもつ乱数を生成する必要がある。一様な乱数を式(C-12)のような確率分布をもつ乱数に変換する変換則は、次のように与えられる：

$$\frac{\Gamma_{wb}}{E_0} = \sqrt{\Lambda} \quad (C-14)$$

ここで、 Λ は 0 から 1 までの一様乱数である。このような乱数が生成されれば、各粒子の座標は式(C-5)と(C-6)を用いて簡単に決定することができる。図 3.3 に、生成したウォーターバッグビームの例を示す。

C. 4 パラボリック分布

パラボリック分布の分布関数は、線形ハミルトニアンを用いて、次のように定義されている：

$$f_{PA}(H_0) = \frac{12N}{\pi^2 \eta^4 R_{PA}^6} (E_{PA} - H_0) \quad (H_0 \leq E_{PA}) \quad (C-15)$$

ここで、 E_{PA} は定数で、パラボリックビームの半径 R_{PA} との間に $R_{PA} = 2\rho_0 = \sqrt{2E_{PA}}/\eta$ のような関係式が成り立つ。パラボリック分布の実空間分布は式(C-15)より、次のように求められる：

$$n_{PA}(r) = \frac{3N}{\pi R_{PA}^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R_{PA}} \right)^2 \right]^2 \quad (C-16)$$

パラボリックビームを生成するためには、式(C-12)のような確率分布をもつ乱数を生成する必要がある。一様な乱数を式(C-15)のような確率分布をもつ乱数に変換する変換則は、次のように与えられる：

$$2 \left(\frac{\Gamma_{PA}}{E_0} \right)^3 - 3 \left(\frac{\Gamma_{PA}}{E_0} \right)^2 + \Lambda = 0 \quad (C-17)$$

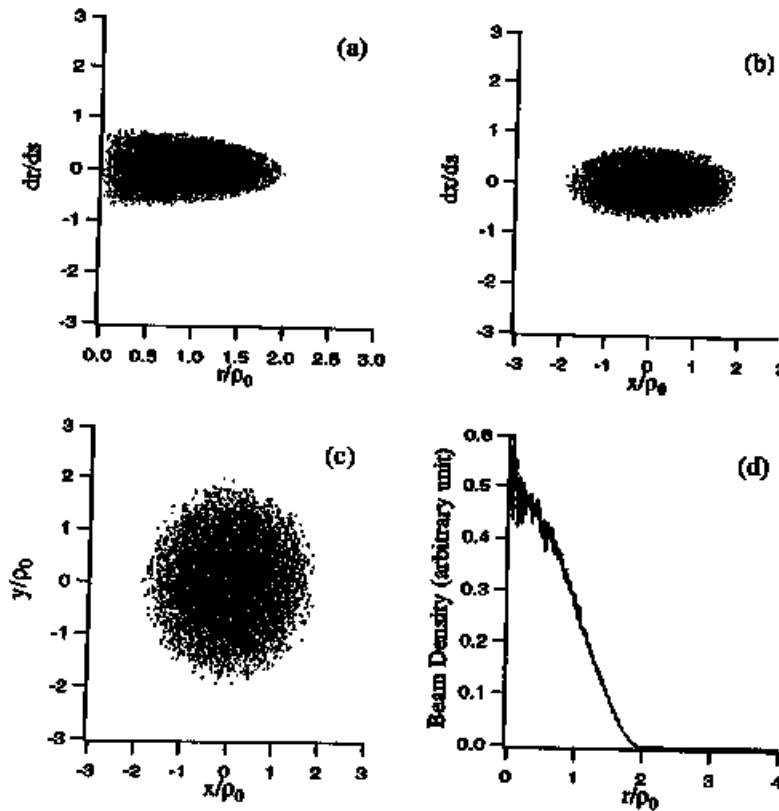


図 3.4. 生成したパラボリックビームの例。(a)は動径方向の位相空間分布。(b)は水平方向の位相空間分布。(c)は直交座標形における実空間分布。(d)は実空間における密度分布。

ここで、 A は 0 から 1 までの一様乱数である。この一様乱数は、式(C-14)を数値的に解くことによって、式(C-15)のような確率分布をもつ乱数 Γ_m に変換される。このような乱数が生成されれば、各粒子の座標は式(C-5)と(C-6)を用いて簡単に決定することができる。図 3 4 に、生成したパラボリックビームの例を示す。

参考文献

- [1] R. A. Jameson, in *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, Washington DC, 3926 (1993).
- [2] *Heavy Ion Fusion*, edited by M. Reiser, T. Godlove and R. Bangerter, AIP Conf. Proc. No. 152 (AIP, New York, 1986).
- [3] R.A. Jameson, Los Alamos Report LA-UR-93-1029 (1993).
- [4] R. L. Gluckstern, *Possible Model for Halo Formation* (unpublished).
- [5] R. L. Gluckstern, Phys. Rev. Lett. **73**, 1247 (1994).
- [6] J. S. O'Connell, T. P. Wangler, R. S. Mills and K. R. Crandall, in *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, Washington DC, 3657 (1993).
- [7] J. M. Lagniel, Nucl. Inst. Meth. A **345**, 46-53 (1994).
- [8] J. M. Lagniel, Nucl. Inst. Meth. A **345**, 405-410 (1994).
- [9] A. Riabko, M. Ellison, X. Kang, S. Y. Lee, D. Li, J. Y. Liu, X. Pei, and L. Wang, Phys. Rev. E **51**, 3529 (1995).
- [10] I. M. Kapchinskij and V. V. Vladimirovskij, in *Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators* (CERN, Geneva, 1959), p.274.
- [11] R. L. Gluckstern, in *Proceedings of the Linac Conference*, Fermilab, 1970, edited by M. R. Tracy (National Accelerator Laboratory, Batavia, IL, 1970), p. 811.
- [12] J. Struckmeier, J. Klabunde and M. Reiser, Particle Accelerators **15**, 47 (1984).
- [13] O. A. Anderson, Particle Accelerators **21**, 197 (1987).
- [14] F. R. Sacherer, IEEE Trans. Nucl. Sci. **18**, 1105 (1971).
- [15] C. Chen and R. C. Davidson, Phys. Rev. E **49**, 5679 (1994).
- [16] C. Chen and R. C. Davidson, Phys. Rev. Lett. **72**, 2195 (1994).
- [17] S. Y. Lee and A. Riabko, Phys. Rev. E **51**, 1609 (1995).
- [18] C. Chen and R. A. Jameson, Phys. Rev. E **52**, 3074 (1995).
- [19] Q. Qian and R. C. Davidson, Phys. Rev. E **53**, 5349 (1996).
- [20] I. Hofmann, L. J. Laslett, L. Smith, and I. Haber, Particle Accelerators **13**, 145 (1983).
- [21] J. Struckmeier and M. Reiser, Particle Accelerators **14**, 227 (1984).
- [22] H. Okamoto and M. Ikegami, Phys. Rev. E **55**, 4694 (1997).
- [23] M. Ikegami and H. Okamoto, Beam Science and Technology **2**, 20 (1997).
- [24] M. Ikegami and H. Okamoto, in *Proceedings of Particle Accelerator Conference*, Vancouver, in print (1997).
- [25] M. Ikegami and H. Okamoto, *Halo Formation from Mismatched Axisymmetric Beams in a Periodic Focusing Channel*, to be published in Japanese Journal of Applied Physics.

- [26] R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles*, (IOP Publishing, London, 1988).
- [27] T. Tajima, *Computational Plasma Physics*, (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989).
- [28] 例えば、M. Reiser, *Theory and Design of Charged Particle Beams*, (Wiley & Sons, New York, 1994).
- [29] 例えば、R. C. Davidson, *Physics of Non-Neutral Plasmas*, (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1990).
- [30] 例えば、A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* 2nd ed., (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [31] 例えば、吉田春夫, 数理科学 384, 37 (1995).
- [32] T. P. Wangler, R. W. Garnett, E. R. Gray, R. D. Ryne, and T. S. Wang, in *Proceedings of the XVIII International Linear Accelerator Conference* (Geneva, Switzerland, 1996), p. 372.
- [33] M. Reiser, C. R. Chen, D. Kehne, K. Low, T. Shea, H. Rudd, and I. Haber, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2933 (1988).
- [34] D. Kehne, K. Low, M. Reiser, T. Shea, C. R. Chang, and Y. Chen, *Nucl. Inst. Meth. A* **278**, 194 (1989).
- [35] M. G. Tiefenback and D. Keefe, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **NS-32**, 2483 (1985).
- [36] J. Kulabunde, P. Spadtke, and A. Schonlein, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **NS-32**, 2462 (1985).